最難関問題

等比数列と合同算術・１

１，２，４，８，１６，３２，６４，…と，１から順に数を２倍していき，それぞれを２５３で割ったときの余りを並べた数列Ａを作ります。

数列Ａ；１，２，４，８，１６，３２，６４，…

以下の問いに答えなさい。

（１）

①　数列Ａの１３番目の数を答えなさい。

②　数列Ａの２１番目の数を答えなさい。

③　数列Ａの２９番目の数を答えなさい。

（２）数列Ａにおいて２度目に１が現れるのを□番目とします。

①　数列Ａの（□－８）番目の数を答えなさい。

②　□にあてはまる数を答えなさい。

最難関問題

等比数列と合同算術・１　（１）①４８　②１４４　③１７９　（２）①１６９　②１１１

（１）１，２，４，８，１６，３２，６４，１２８までは２５３よりも小さいので，そのまま２５３で割ったときの余りになります。９番目の数は１２８×２＝２５６で，２５３で割ると，２５６÷２５３＝１余り３となるので，数列Ａの９番目の数は３です。

　２５３で割って３余る数を２倍した数を２５３で割ると，余りは３×２＝６となるので，数列Ａの１０番目の数は６です。１１番目以降も同様に続けていくと，数列Ａの１３番目までは以下のようになります。

１，２，　４，　８，１６，３２，６４，１２８，
３，６，１２，２４，４８

よって，数列Ａの１３番目の数は４８です（…①）。

　数列Ａの２１番目の数は，２を２０個かけあわせた数を２５３で割った余りです。ここで，次の式を考えます。

$$\underbrace{2\times\cdots\times2}_{20\text{個}}=\underbrace{2\times\cdots\times2}_{12\text{個}}\times\underbrace{2\times\cdots\times2}_{8\text{個}}$$

$\underbrace{2\times\cdots\times2}_{12\text{個}}$ は２５３で割ると余りが４８の数で，$\underbrace{2\times\cdots\times2}_{8\text{個}}$ は２５３で割ると余りが３の数です。

よって，$\underbrace{2\times\cdots\times2}_{20\text{個}}$ は２５３で割ると余りが４８×３＝１４４の数となるので，数列Ａの２１番目の数は１４４です（…②）。

　同様に考えると，数列Ａの２９番目の数は１４４×３＝４３２ですが，４３２は２５３より大きいので，４３２÷２５３＝１余り１７９より，１７９です（…③）。

最難関問題

（２）

①　数列Ａの□番目の数は，２を（□－１）個かけあわせた数ですが，以下では式の見やすさのために，□－１＝△とします。

$\underbrace{2\times\cdots\times 2}_{\triangle\text{個}}=\underbrace{2\times\cdots\times 2}_{(\triangle-8)\text{個}}\times\underbrace{2\times\cdots\times 2}_{8\text{個}}$ であることから，$\underbrace{2\times\cdots\times 2}_{(\triangle-8)\text{個}}$ を２５３で割った余りを３倍した数を２５３で割ると，その余りは１となります。

よって，$\underbrace{2\times\cdots\times 2}_{(\triangle-8)\text{個}}$ を２５３で割った余りを３倍した数は，２５３×３よりは小さいことから，

１＋２５３×０＝１＋０＝１，

１＋２５３×１＝１＋２５３＝２５４，

１＋２５３×２＝１＋５０６＝５０７，のいずれかです。これらの中で３の倍数は５０７だけなので，

５０７÷３＝１６９が $\underbrace{2\times\cdots\times 2}_{(\triangle-8)\text{個}}$ を２５３で割った余りですから，数列Ａの（□－８）番目の数は

１６９です。

②　同様にして数列Ａを８個ずつさかのぼっていけば，いずれは１，２，４，８，１６，３２，６４，１２８のどれかにたどり着きます。

手早く求めていくために，０，２５３，５０６を３で割ったときの商と余りを求めておきます。

$\boxed{\text{０÷３＝０余り０，２５３÷３＝８４余り１，５０６÷３＝１６８余り２}}$

１６９÷３＝５６余り１より，（１６９＋５０６）÷３＝５６＋１６８＋１＝２２５，

２２５÷３＝７５余り０より，（２２５＋０）÷３＝７５，

７５÷３＝２５余り０より，（７５＋０）÷３＝２５，

２５÷３＝8余り１より，（２５＋５０６）÷３＝8＋１６８＋１＝１７７，

１７７÷３＝５９余り０より，（１７７＋０）÷３＝５９，

５９÷３＝１９余り２より，（５９＋２５３）÷３＝１９＋８４＋１＝１０４，

１０４÷３＝３４余り２より，（１０４＋２５３）÷３＝３４＋８４＋１＝１１９，

１１９÷３＝３９余り２より，（１１９＋２５３）÷３＝３９＋８４＋１＝１２４，

１２４÷３＝４１余り１より，（１２４＋５０６）÷３＝４１＋１６８＋１＝２１０，

２１０÷３＝７０余り０より，（２１０＋０）÷３＝７０，

７０÷３＝２３余り１より，（７０＋５０６）÷３＝２３＋１６８＋１＝１９２，

１９２÷３＝６４，となってたどり着きました。

６４は2を６個かけあわせた数ですから，△は６＋８×１３＝１１０です。

よって，１１０＋１＝１１１（番目）です。