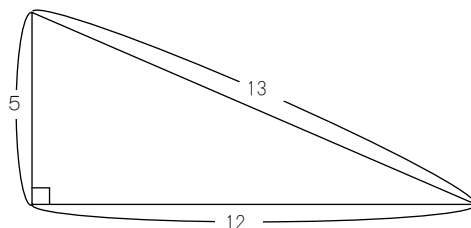
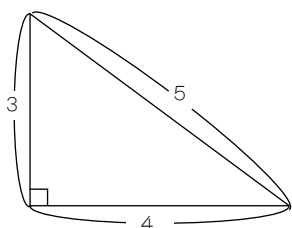


ピタゴラス三角形

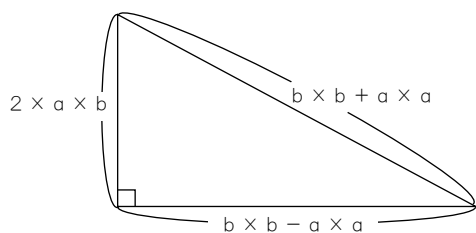
Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

$$2 \times a \times b : b \times b - a \times a : b \times b + a \times a$$

3 辺の長さの比が整数比となる直角三角形を、ピタゴラス三角形といいます。有名なところでは、3 : 4 : 5 や 5 : 12 : 13 の三角形があります。

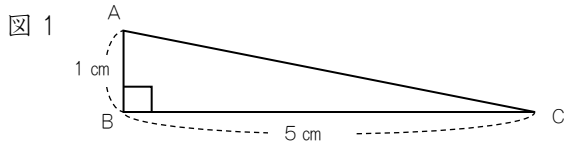


以下では、 $a < b$ であるあらゆる整数 a 、 b に対して、3 辺の長さの比が $(2 \times a \times b) : (b \times b - a \times a) : (b \times b + a \times a)$ となるピタゴラス三角形が存在することを示す、4 つの問題を紹介します。



1

(1) 図1のように、直角をはさむ2つの辺の長さが1 cmと5 cmである直角三角形ABCがあります。方眼上にこの三角形をかいたのが、図2です。図2の方眼の交点上に点Pをとり、辺ACを底辺とする二等辺三角形ACPを1つ作図しなさい。定規やコンパスを用いてはいけません。



(2) 図3に、辺BPとCPの長さがcmの単位で整数となるような直角三角形BCPを作図しなさい。定規やコンパスを用いてはいけません。

図2

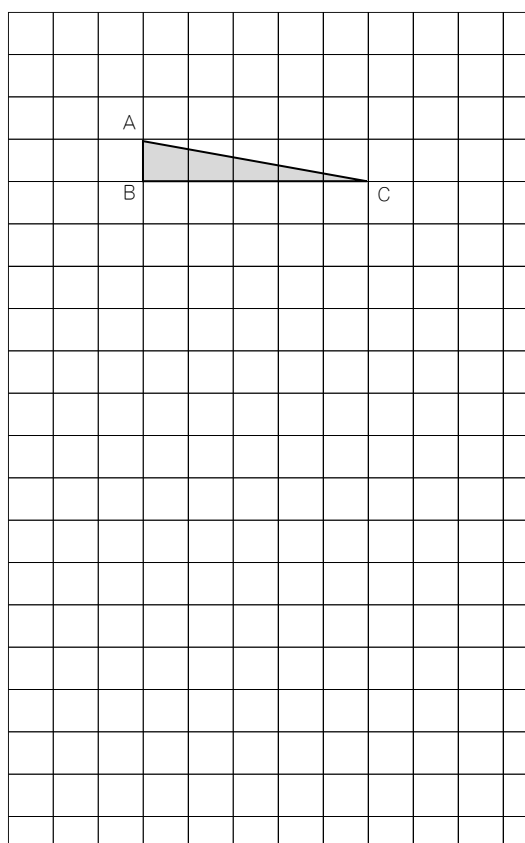
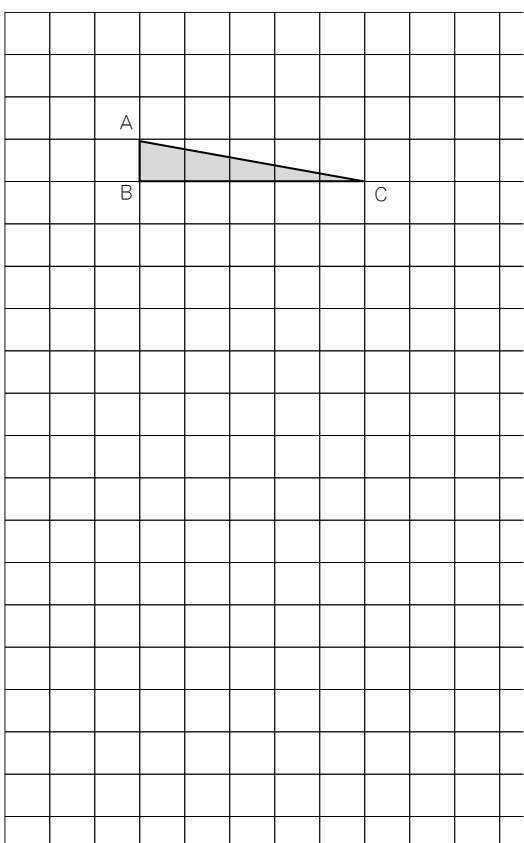


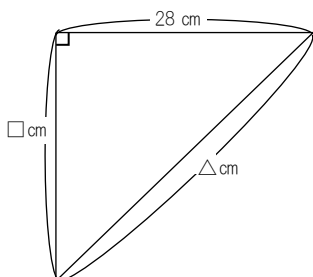
図3



(問題は次のページに続きます)

(3) 図4の直角三角形において、□と△にあてはまる数の差は8です。□と△にあてはまる数の組を答えなさい。

図4

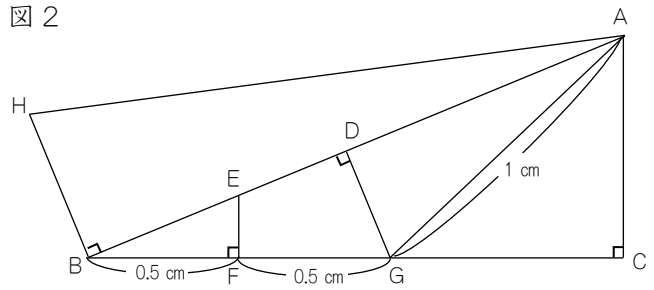
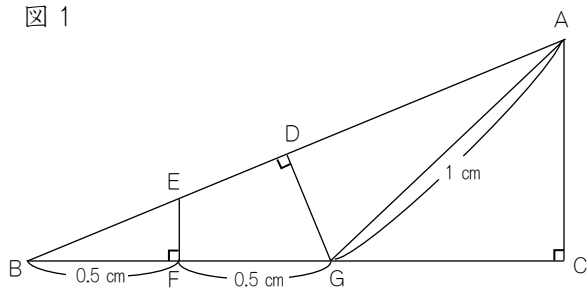


(4) 直角三角形の3辺の長さの比として考えられる整数比を、2つ答えなさい。

ただし、3 : 4 : 5, 5 : 12 : 13, 8 : 15 : 17および(3)の答えと等しいものは除きます。

2

図1の直角三角形ABCは、辺AB上の点D、Eおよび辺BC上の点F、Gについて、 $BF = FG = 0.5\text{ cm}$ 、 $AG = 1\text{ cm}$ で、EFと辺BC、GDと辺ABは垂直に交わります。



- (1) BEの長さが0.6 cmのとき、BDの長さは何cmですか。
- (2) EFの長さが0.25 cmのとき、①、②に答えなさい。
- ① $BH = BE$ となる図2の直角三角形ABHの面積は何 cm^2 ですか。
- ② 直角三角形AGCの3辺の長さの比を答えなさい。答えるときは、 $3 : 1 : 2$ ではなくて $1 : 2 : 3$ のように、小さい順に答えなさい。
- (3) 直角三角形の3辺の長さの比として考えられる整数比を、2つ答えなさい。
ただし、 $3 : 4 : 5$ 、 $5 : 12 : 13$ 、 $8 : 15 : 17$ は除きます。また、答えるときは、 $3 : 1 : 2$ ではなくて $1 : 2 : 3$ のように、小さい順に答えなさい。

3

次の問いに答えなさい。

(1) 図1において点FがCEを二等分するとき、長方形ABCDの面積は何 cm^2 ですか。

(2) 図2の長方形ABCDにおいて点FがCEを二等分するとき、ABとAEの長さはそれぞれ何 cm ですか。

図1

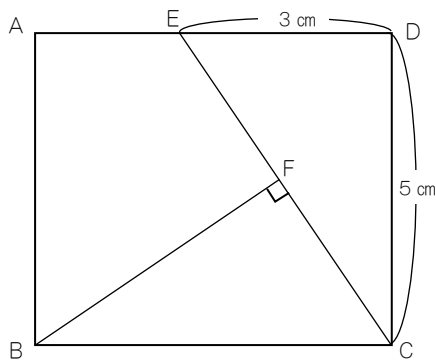
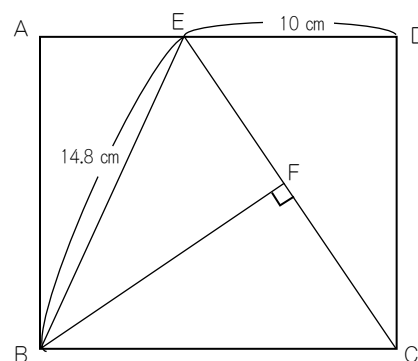


図2

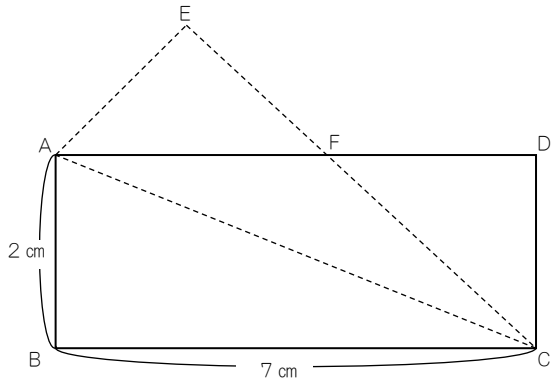


(3) 直角三角形の3辺の長さの比として考えられる整数比を、4つ答えなさい。

ただし、 $3 : 4 : 5$ 、 $5 : 12 : 13$ は除きます。また、答えるときは、 $3 : 1 : 2$ ではなくて
 $1 : 2 : 3$ のように、小さい順に答えなさい。

4

下の図の長方形 $ABCD$ は、辺 AB の長さが 2 cm 、辺 BC の長さが 7 cm です。対角線 AC を折り目として頂点 B を折り返すと、頂点 B は点 E の位置にきます。辺 AD と EC の交わる点を F とするとき、 DF および CF の長さを求めなさい。



ピタゴラス三角形

$$2 \times a \times b : b \times b - a \times a : b \times b + a \times a$$

解答解説

以下の表は、ピタゴラス数 $(2 \times a \times b) : (b \times b - a \times a) : (b \times b + a \times a)$ の例です。

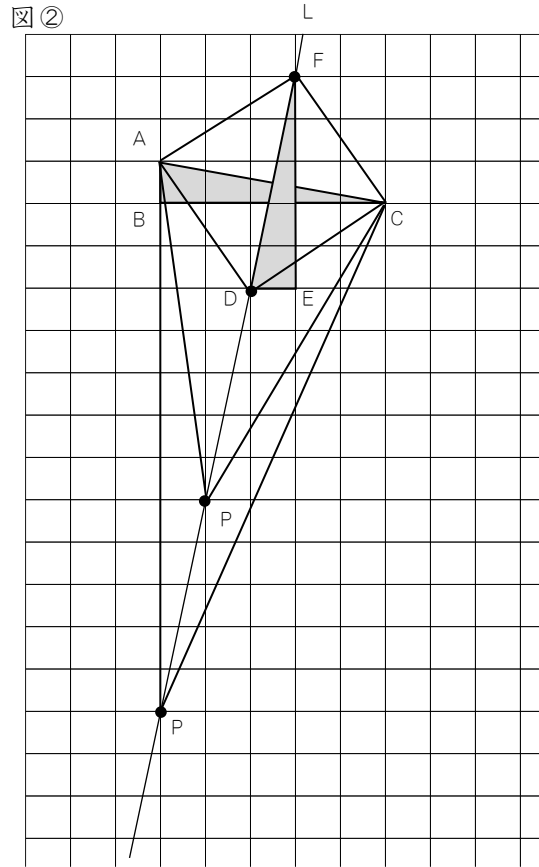
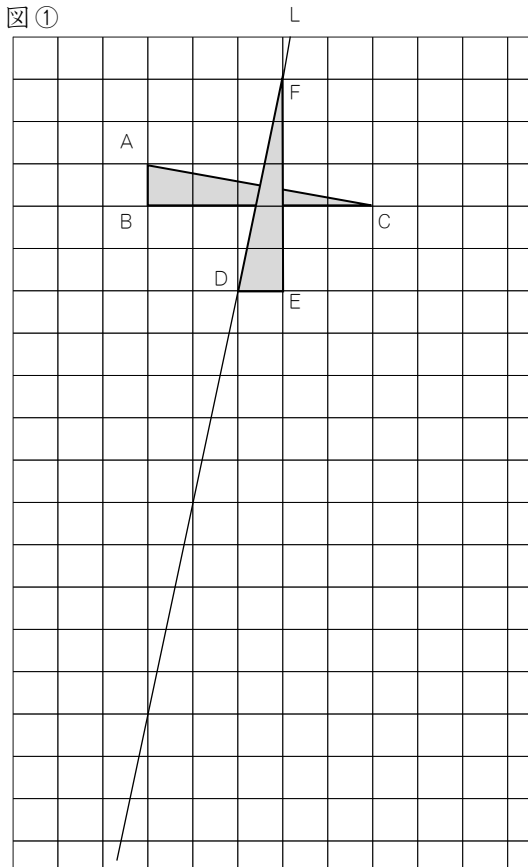
<ピタゴラス数の表>

a	b	$2 \times a \times b$	$b \times b - a \times a$	$b \times b + a \times a$		a	b	$2 \times a \times b$	$b \times b - a \times a$	$b \times b + a \times a$
1	2	4	3	5		2	17	68	285	293
1	3	6	8	10		2	19	76	357	365
1	4	8	15	17		3	4	24	7	25
1	5	10	24	26		3	5	30	16	34
1	6	12	35	37		3	7	42	40	58
1	7	14	48	50		3	8	48	55	73
1	8	16	63	65		3	10	60	91	109
1	9	18	80	82		3	11	66	112	130
1	10	20	99	101		3	13	78	160	178
1	11	22	120	122		3	14	84	187	205
1	12	24	143	145		3	16	96	247	265
1	13	26	168	170		4	5	40	9	41
1	14	28	195	197		4	7	56	33	65
1	15	30	224	226		4	9	72	65	97
1	16	32	255	257		5	6	60	11	61
1	17	34	288	290		5	7	70	24	74
1	18	36	323	325		5	8	80	39	89
1	19	38	360	362		5	9	90	56	106
1	20	40	399	401		6	7	84	13	85
2	3	12	5	13		6	11	132	85	157
2	5	20	21	29		7	8	112	15	113
2	7	28	45	53		7	9	126	32	130
2	9	36	77	85		8	9	144	17	145
2	11	44	117	125		8	11	176	57	185
2	13	52	165	173		9	10	180	19	181
2	15	60	221	229		9	11	198	40	202

1 (1) 図②参照 (2) 図③参照 (3) $(\square, \triangle) = (45, 53)$ (4) 解説参照

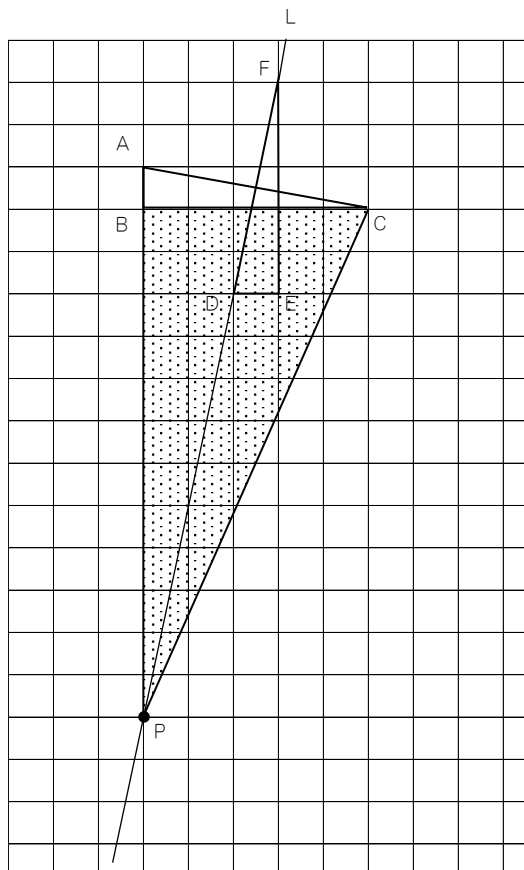
(1) 図①のように三角形ABCと合同な三角形DEFを組み合わせると、辺ACと辺DFが互いの midpoint で垂直に交わります。辺DFをのばした直線Lは5マス下に下がると1マス左に進むという傾きになります。L上の1点と頂点A, Cを結んでできる三角形はすべて辺ACを底辺とする二等辺三角形になります。

よって、図②の三角形ACF, ACD, 2つのACPという4つの三角形のうちひとつをかけた正解となります。



(2) AC を底辺とする二等辺三角形 ACP のうちで、点 P を図③の位置にとったものを利用すると、三角形 BCP と三角形 GPC が、最も短い辺の長さが 5 cm の直角三角形になります。 $BP = GC = 1.2\text{ cm}$ 、三角形 ACP が二等辺三角形であるため、 $PC = PA = 1.3\text{ cm}$ となるため、3辺の長さが cm の単位で整数となります。

図③



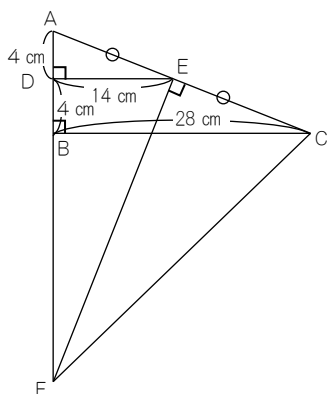
(3) (2)と同様にして、図④の $AB = 8\text{ cm}$, $BC = 28\text{ cm}$ の直角三角形 ABC を考えます。辺 AB の中点を D , 辺 AC の中点を E として、 E から AC と垂直に交わる線を引き、辺 AB の延長線との交点を F とします。すると、三角形 ACF は $AF = CF$ の二等辺三角形になります。また、

$$DE = 28 \times \frac{1}{2} = 14 \text{ (cm) です。}$$

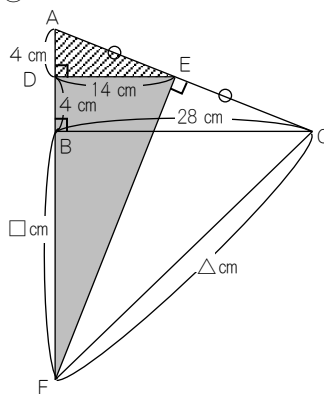
図⑤の三角形 ADE と EDF の相似により、 DF の長さは $14 \times \frac{14}{4} = 49 \text{ (cm)}$ なので、

$$\square = 49 - 4 = 45, \triangle = 49 + 4 = 53 \text{ です。}$$

図④



図⑤



(4) (3)と同様にして、 AB と BC の長さを決めれば、三角形 BCF の3辺の長さを求めることができます。 AB と BC が整数であっても、 BF と CF は小数や分数になることがあります。整数比を求めることは可能です。

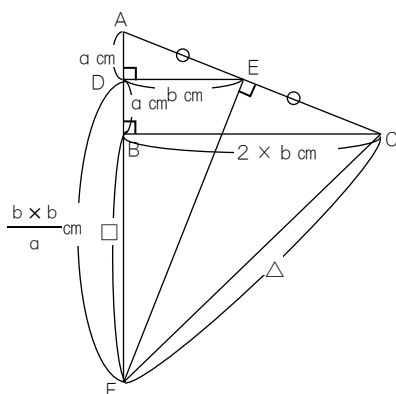
以下では、式を用いて整数比を表してみます。図⑥のように a , b の長さをきめます。 DF の長さは、

$$b \times \frac{b}{a} = \frac{b \times b}{a} \text{ (cm) となるので、} \square = \frac{b \times b}{a} - a \text{ (cm), } \triangle = \frac{b \times b}{a} + a \text{ (cm) です。}$$

$$(2 \times b) : \left(\frac{b \times b}{a} - a\right) : \left(\frac{b \times b}{a} + a\right) = (2 \times a \times b) : (b \times b - a \times a) : (b \times b + a \times a)$$

となるので、 $a < b$ となる2つの整数 a , b から、〈ピタゴラス数の表〉のような整数比を求めることができます。

図⑥

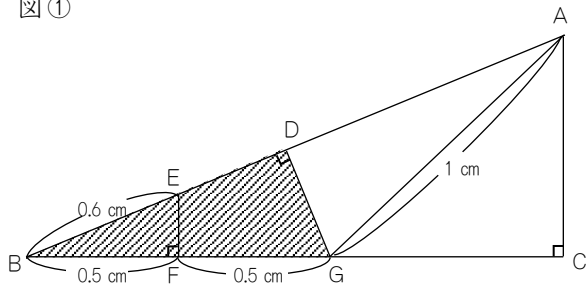


2 (1) $\frac{5}{6}$ cm (2) ① 0.5 cm^2 ② $3 : 4 : 5$ (3) 解説参照

(1) 図①において、直角三角形BEFとBGDは相似形なので、 $0.6 : 0.5 = 1 : BD$ より、

$$BD = 0.5 \times 1 \div 0.6 = \frac{5}{6} \text{ (cm) です。}$$

図①



(2)

① 図①の直角三角形BEFとBGDの相似より、 $BE : BF = BG : BD$ なので、

$BE \times BD = BF \times BG = 0.5 \times 1 = 0.5$ です。よって、 $BE \times BA = 0.5 \times 2 = 1$ です。BH = BEであることから、三角形ABHの面積は、 $1 \div 2 = 0.5 \text{ (cm}^2\text{)}$ です。

つまり、三角形ABHの面積はEFの長さによらずにきまり、 $BF \times 2 = BG$ の場合には、 $2 \times BF \times BF$ となります。

② 図②の三角形BEHは直角二等辺三角形です。辺CBの延長線に点Hから垂直な線HIをひくと、三角形BFEと三角形HIBは合同となるので、三角形BEHの面積は、

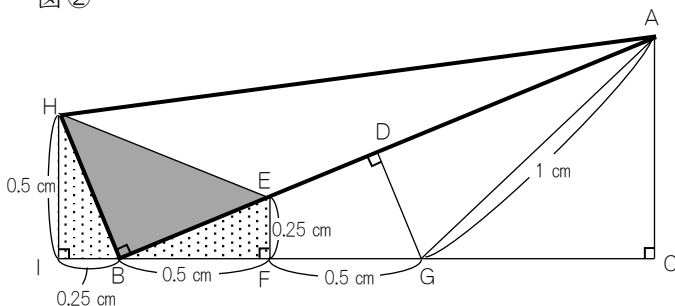
$$(0.25 + 0.5) \times 0.75 \times \frac{1}{2} - 0.25 \times 0.5 \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{5}{32} \text{ (cm}^2\text{)} \text{ です。}$$

三角形BEHと三角形ABHの面積の比は、 $\frac{5}{32} : \frac{1}{2} = 5 : 16$ なので、 $BE : BA = 5 : 16$ です。

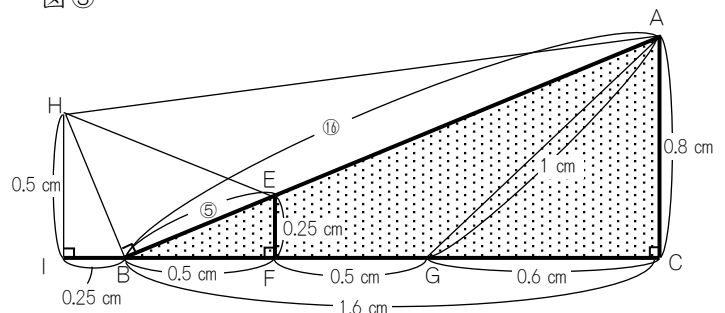
よって、図③の直角三角形BEFとBACの相似比は5 : 16となり、

辺ACの長さは $0.25 \times \frac{16}{5} = 0.8 \text{ (cm)}$ 、GCの長さは $0.5 \times \frac{16}{5} - 1 = 0.6 \text{ (cm)}$ です。直角三角形AGCの3辺の長さの比は、 $0.6 : 0.8 : 1 = 3 : 4 : 5$ です。

図②



図③



(3) EFの長さが0.5 cm未満であれば、(2)と同様の方法で直角三角形AGCの辺ACとGCの長さを求めることができるので、直角三角形の3辺の長さの比として考えられる整数比がきまります。こうして、直角三角形の3辺の長さの整数比をいくらでも求めることができます。例えば、右のようになります。

EF (cm)	3辺の長さの比		
0.05	101	20	99
0.1	13	5	12
0.15	109	60	91
0.2	29	20	21
0.25	5	4	3
0.3	17	15	8
0.35	149	140	51
0.4	41	40	9
0.45	181	180	19

さらに式の整理を進めると、次のようになります。図④のようにaとbの長さをきめます。台形FEHIの面積は、 $(a+b) \times (a+b) \div 2 = \frac{(a+b) \times (a+b)}{2}$ 、斜線で示した三角形BEFとHIBの面積はあ

わせて $a \times b$ なので、かげをつけた直角二等辺三角形HBEの面積は、 $\frac{(a+b) \times (a+b)}{2} - a \times b = \frac{a \times a + 2 \times a \times b + b \times b}{2} - a \times b$

$= \frac{a \times a + b \times b}{2}$ です。また、(2)①より太線で囲んだ直角二等辺三角形ABEの面積は $2 \times b \times b$ なので、

$BE : BA = \frac{a \times a + b \times b}{2} : (2 \times b \times b) = (a \times a + b \times b) : (4 \times b \times b)$ です。

図⑤の太線で示した三角形の相似により、アの長さは、 $a \times \frac{4 \times b \times b}{a \times a + b \times b} = \frac{4 \times a \times b \times b}{a \times a + b \times b}$ 、

イの長さは、 $ア \times \frac{b}{a} = \frac{4 \times a \times b \times b}{a \times a + b \times b} \times \frac{b}{a} = \frac{4 \times b \times b \times b}{a \times a + b \times b}$ 、

ウの長さは、 $イ - 2 \times b = \frac{4 \times b \times b \times b}{a \times a + b \times b} - 2 \times b$ となるので、直角三角形ACGの3辺の長さの比は、

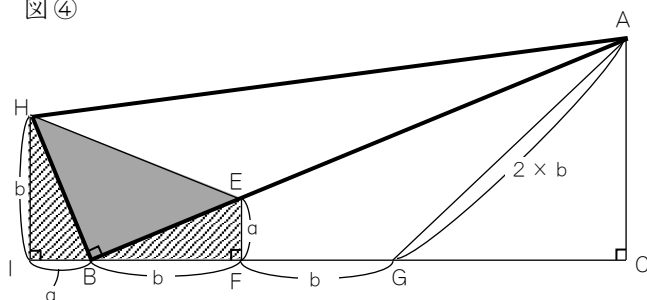
$$\frac{4 \times a \times b \times b}{a \times a + b \times b} : \left(\frac{4 \times b \times b \times b}{a \times a + b \times b} - 2 \times b \right) : (2 \times b) = \frac{2 \times a \times b}{a \times a + b \times b} : \left(\frac{2 \times b \times b}{a \times a + b \times b} - 1 \right) : 1$$

$$= (2 \times a \times b) : (2 \times b \times b - a \times a - b \times b) : (a \times a + b \times b)$$

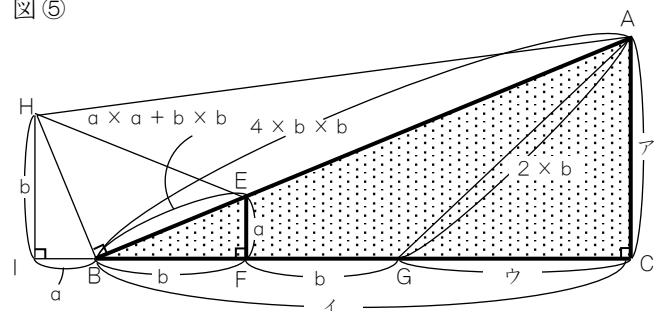
$$= (2 \times a \times b) : (b \times b - a \times a) : (a \times a + b \times b)$$

となります。よって、<ピタゴラス数の表>のような整数比を求めることができます。

図④



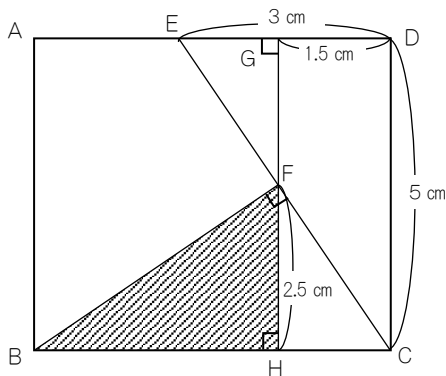
図⑤



③ (1) $28\frac{1}{3}\text{cm}^2$ (2) $AB = 14\text{cm}$, $AE = 4.8\text{cm}$ (3) 解説参照

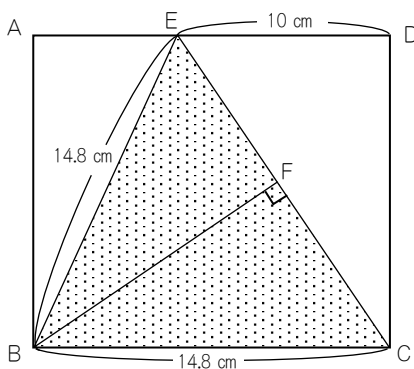
(1) 図①のように、点Fを通して辺ABと平行な直線GHを引きます。点FがCEを二等分することから、 $GD = 3 \div 2 = 1.5\text{ (cm)}$ 、 $FH = 5 \div 2 = 2.5\text{ (cm)}$ です。斜線部分の三角形BFHは三角形CDEと相似なので、 $BH = 2.5 \times \frac{5}{3} = \frac{25}{6}\text{ (cm)}$ です。辺BCの長さは、 $\frac{25}{6} + 1.5 = \frac{17}{3}\text{ (cm)}$ なので、長方形ABCDの面積は、 $5 \times \frac{17}{3} = 28\frac{1}{3}\text{ (cm}^2\text{)}$ です。

図①

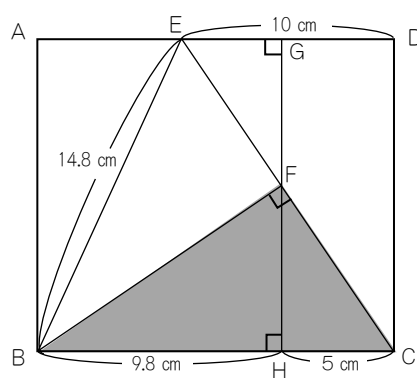


(2) 図②に示した三角形BCEは二等辺三角形なので、 $BC = 14.8\text{ cm}$ 、 $AE = 14.8 - 10 = 4.8\text{ (cm)}$ です。図③のように点Fを通して辺ABと平行な直線GHを引くと、点FがCEを二等分することから、 $CH = 10 \div 2 = 5\text{ (cm)}$ です。かげをつけた部分の直角三角形の相似によって、 $5 : FH = FH : 9.8$ が成り立つので、 $FH \times FH = 5 \times 9.8 = 49$ 、 $FH = 7$ です。よって、 $AB = 7 \times 2 = 14\text{ (cm)}$ です。

図②



図③



(3) 図④のように図形を組み合わせた長方形 ABCD において、CD と DE の長さを定めると、かげをつけた直角三角形 ABE の 3 辺の長さをすべて求めることができるので、整数比を得ることができます。

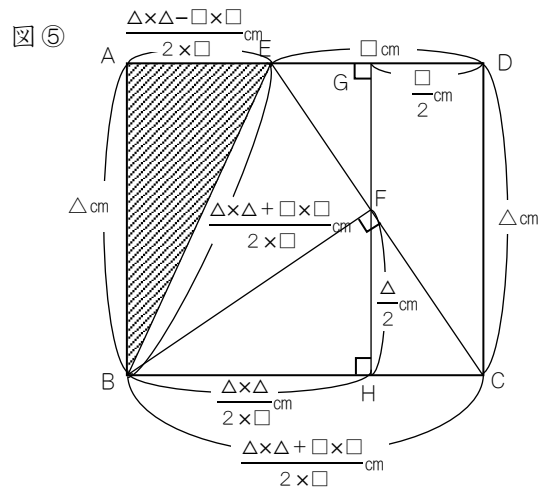
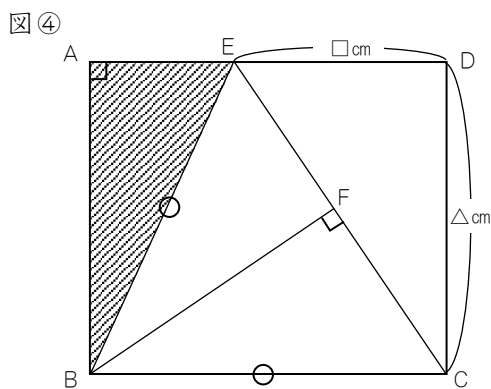
(1) では $\square = 3$, $\triangle = 5$ で、 $AB = 5 \text{ cm}$, $BE = BC = \frac{17}{3} \text{ cm}$, $AE = \frac{8}{3} \text{ cm}$ なので、3 辺の長さの

比は $\frac{8}{3} : 5 : \frac{17}{3} = 8 : 15 : 17$,

(2) では $\square = 10$, $\triangle = 14$ で、 $AB = 14 \text{ cm}$, $BE = 14.8 \text{ cm}$, $AE = 4.8 \text{ cm}$ なので、3 辺の長さの比は $4.8 : 14 : 14.8 = 12 : 35 : 37$, となっています。

一般に、 \square と \triangle を用いて式を立てると図⑤のようになるので、3 辺の長さの比は、

$$\frac{\Delta \times \Delta - \square \times \square}{2 \times \square} : \Delta : \frac{\Delta \times \Delta + \square \times \square}{2 \times \square} = (\Delta \times \Delta - \square \times \square) : (2 \times \Delta \times \square) : (\Delta \times \Delta + \square \times \square), \text{ です。}$$

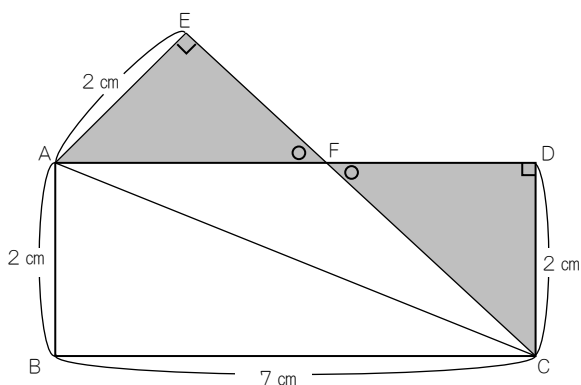


よって、〈ピタゴラス数の表〉のような整数比を求めることができます。

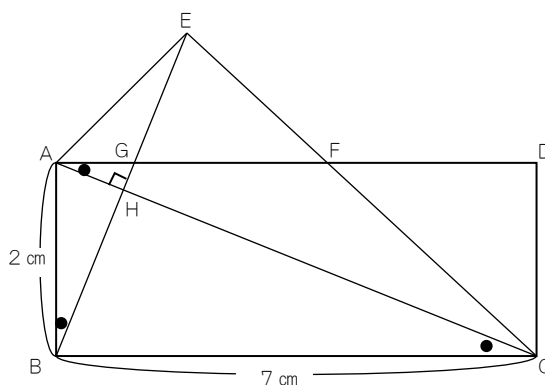
4 $DF \dots \frac{45}{14} \text{cm}, CF \dots \frac{53}{14} \text{cm}$

図①のかげをつけた三角形AEFとCDFは合同なので、 $DF = EF, CF = AF$ です。図②のように辺ADとBEの交わる点をG, 対角線ACとBEの交わる点をHとすると、●印をつけた角の大きさは等しいので、直角三角形の相似により、 $GH : HA = 2 : 7, HA : HB = 2 : 7$ となって、 $GH : HA : HB = (2 \times 2) : (2 \times 7) : (7 \times 7) = 4 : 14 : 49$ です。よって、 $GA = 7 \times \frac{4}{49} = \frac{4}{7}$ (cm) です。

図①



図②



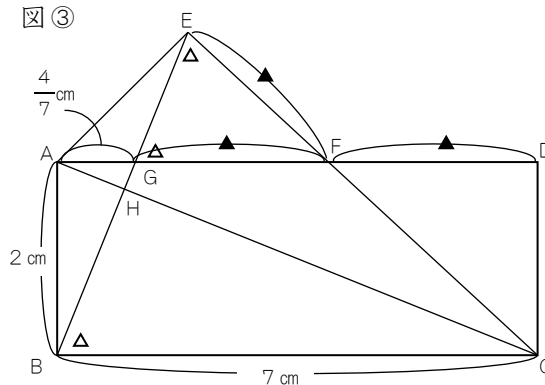
図③の△印をつけた角は、折り返しおよび平行線の同位角の関係によって等しいので、三角形FEGは $FE = FG$ の二等辺三角形です。よって、図③の▲の辺の長さはすべて等しいことがわかり、

$DF = (7 - \frac{4}{7}) \div 2 = \frac{45}{14}$ (cm) です。また、ECの長さ

は7 cmで、EFの長さが $\frac{45}{14}$ cmであることから、

$CF = 7 - \frac{45}{14} = \frac{53}{14}$ (cm) です。

図③



この問題では、長方形の2辺の長さを与えるだけで、直角三角形CDFの3辺の長さをすべて求めることができました。つまり、2つの整数をきめれば、そこから直角三角形の3辺の長さの整数比を求めることができるということです。ABの長さをa、BCの長さをbとして式で表すと、図④のようになります。3辺の長さの比は、次のようになります。

$$a : \frac{b \times b - a \times a}{2 \times b} : \frac{b \times b + a \times a}{2 \times b} = (2 \times a \times b) : (b \times b - a \times a) : (b \times b + a \times a)$$

図④

