受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

Ｎ進法の整数と小数

１．整数と位取り

例題１　１０進法

（１）$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ の数字が書かれたカードが１枚ずつあります。これらを並びかえてできる３けたの整数の和を求めなさい。

（２）$\boxed{0}$ から $\boxed{9}$ までの数字が書かれたカードが１枚ずつあります。ここから３枚のカードを選んで，並びかえてできる３けたの整数の和を求めたところ，２９５４になりました。選んだ３枚のカードの組合せとして考えられるものをすべて答えなさい。

$\boxed{\text{解答}}$（１）２６６４　（２）（$\boxed{0}$，$\boxed{5}$，$\boxed{9}$），（$\boxed{0}$，$\boxed{6}$，$\boxed{8}$）

$\boxed{\text{解説}}$

（１）例えば３けたの整数３４５の百の位の３は，百が３個あるという意味です。
１００×３＋１０×４＋１×５＝３４５ですから，３４５は３４５なのです。
　さて，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ のカードの並びかえは，３×２×１＝６（通り）ですから，どのカードも各位に２回ずつ登場します。よって，（３＋４＋５）×１１１×２＝２６６４です。

（２）選んだカードに $\boxed{0}$ が含まれない場合，（１）より３けたの整数の和は１１１×２＝２２２の倍数になります。ところが，２９５４÷２２２は割り切れません。
　選んだ３枚のカードが（$\boxed{0}$，$\boxed{a}$，$\boxed{b}$）の場合，並びかえは２×２×１＝４（通り）です。このとき，$\boxed{a}$，$\boxed{b}$ のカードは百の位に４÷２＝２（回）ずつ登場します。また，３枚のカードはそれぞれ４回登場しますから，$\boxed{0}$ のカードは十・一の位に４÷２＝２（回）ずつ登場します。よって，$\boxed{a}$，$\boxed{b}$ のカードは十・一の位に（４－２）÷２＝１（回）ずつ登場します。よって４個の整数の和２９５４＝（ａ＋ｂ）×２１１となります。２９５４÷２１１＝１４より，ａ＋ｂ＝１４ですから，（$\boxed{a}$，$\boxed{b}$）＝（５，９），（６，８）のいずれかです。
　以上より，選んだ３枚のカードの組合せは，（$\boxed{0}$，$\boxed{5}$，$\boxed{9}$），（$\boxed{0}$，$\boxed{6}$，$\boxed{8}$）です。

問題１

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ の数字が書かれたカードが１枚ずつあります。これらを並びかえて４けたの整数を作ります。

（１）カードを並びかえてできる４けたの整数は全部で何個ありますか。

（２）カードを並びかえてできる４けたの整数の和を求めなさい。

問題２

$\boxed{0}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ の数字が書かれたカードが１枚ずつあります。これらを並びかえてできる４けたの整数の和を求めなさい。

問題３

$\boxed{0}$ から $\boxed{9}$ までの数字が書かれたカードが１枚ずつあります。ここから３枚のカードを選んで，並びかえてできる３けたの整数の和を求めたところ，１７７６になりました。選んだ３枚のカードの組合せとして考えられるものをすべて答えなさい。

問題４

３けたの整数Ａの各位の数字を入れかえてできるすべての３けたの整数とＡの和が１９９８になりました。Ａに用いられる３つの数字の組合せとして考えられるものをすべて答えなさい。

例題２　Ｎ進法
　０，１，２のみを用いてできる１以上の整数を，左から順に並べていきます。
　　　　　１，２，１０，１１，１２，２０，２１，２２，１００，１０１，…
（１）２２２は左から何番目に現れますか。
（２）３４番目に現れる整数を答えなさい。

解答（１）２６番目　（２）１０２１

解説
　各位の数は，３個集まるごとにくり上がります。よって，２１は３が２個と１が１個で，３×２＋１×１＝７より７番目に，１０１は９が１個と３が０個と１が１個で９×１＋３×０＋１×１＝１０より１０番目に現れます。１０進法は１の位，１０の位，１００の位…となっているのに対し，１の位，３の位，９の位…となっているので，３進法といいます。

（１）９×２＋３×２＋１×２＝２６より２６番目です。

（２）１０進法の３４を３進法で表す問題です。大きい位から順に考えて，３４－２７×１＝７，
　７－３×２＝１ですから，２７×１＋９×０＋３×２＋１×１＝３４より，１０２１です。

※以下では，２進法から１０進法までを次のように定めます。
２進法…０，１のみを用いて整数を１から順に１，１０，１１，１００，１０１，１１０，…と表す。
３進法…０，１，２のみを用いて整数を１から順に１，１０，１１，１２，２０，２１，２２，１００，１０１，…と表す。
……
９進法…０～８のみを用いて整数を１から順に１，２，３，４，５，６，７，８，１０，１１，１２，…と表す。
１０進法…０～１０のみを用いて整数を１から順に１，２，３，４，５，６，７，８，９，１０，１１，１２，…と表す。

問題５

　以下の整数を１０進法で表しなさい。

（１）２進法の１０１１

（２）５進法の４２０３

（３）８進法の７７７７

問題６

（１）１０進法の１００を２進法で表しなさい。

（２）１０進法の３０７を４進法で表しなさい。

（３）１０進法の７７７を７進法で表しなさい。

問題７

（１）２進法の１１１を４進法で表しなさい。

（２）５進法の３４２を７進法で表しなさい。

（３）９進法の６６６を６進法で表しなさい。

問題８

　３進法の２は４進法でも２ですから，けた数がどちらも１けたです。３進法でも４進法でも同じけた数である整数のうち，もっとも大きいものを３進法で答えなさい。

問題９

　$\boxed{0}$～$\boxed{8}$の数字が書かれたカードが箱にたくさん入っています。ここから抜き取った３枚を並びかえてできる９進法の３けたの整数の和は９進法で１３６６になりました。抜き取った３枚のカードの組合せとして考えられるものをすべて答えなさい。

２．整数の加減乗除

例題３　加法と減法

　以下の１０進法の式を，３進法で表して計算をし，答えを３進法で表しなさい。

（１）１５＋５

（２）１５－５

解答（１）２０２　（２）１０１

解説

　１０進法の１５，５は３進法では１２０，１２です。

（１）１０進法において１０ごとにくり上がりがあるように，３進法では３ごとにくり上がりがあります。

```
  １２０
＋  １２
────────
  ２０２
```

0+2＝0

2+1＝3 でくり上がり

くりあがった１と１を加えて２

（２）１０進法では上のけたの１が１０となってくり下がりますが，３進法では３となってくり下がります。

くり下がり

```
  １２０
－  １２
────────
  １０１
```

3-2＝1

1-1＝0

問題１０

以下の１０進法の式を，２進法で表して計算をし，答えを２進法で表しなさい。

（１）１２＋７

（２）１６－７

問題１１

以下の１０進法の式を，５進法で表して計算をし，答えを５進法で表しなさい。

（１）６２４＋１５６

（２）２０２－１０９

問題１２

以下の１０進法の式を，４進法で表して計算をし，答えを４進法で表しなさい。

（１）９３５＋１１４

（２）５５３－１７８

例題４　乗法と除法

以下の１０進法の式を，４進法で表して計算をし，答えを４進法の整数で表しなさい。余りがあるときは，余りも４進法で表しなさい。

（１）２×３　　　　　（２）５７×１４

（３）１５÷５　　　　（４）１５５÷５　　　　（５）８７÷７

解答（１）１２　（２）３０１３２　（３）３　（４）１３３　（５）３０余り３

解説

（１）１０進法の２，３は４進法でも２，３です。１０進法において１０ごとにくり上がりがあるように，４進法では４ごとにくり上がりがあります。２×３＝６ですから，４の位に１くり上がり，１の位は６－４＝２となるので，１２です。

（２）１０進法の５７，１４は４進法では３２１，３２です。４ごとにくり上がる点に注意をすると，次のようになって３０１３２です。

$$\begin{array}{r} 321 \\ \times \quad 32 \\ \hline 1302 \\ 2223 \\ \hline 30132 \end{array}$$

（３）～（５）

４進法では４ごとにくり上がりとくり下がりがある点に注意をして計算します。

１０進法の１５，５，１５５，８７，７は４進法では３３，１１，２１２３，１１１３，１３です。

（３）

$$\begin{array}{r} 3 \\ 11\,\overline{)\,33} \\ 33 \\ \hline 0 \end{array}$$

（４）

$$\begin{array}{r} 133 \\ 11\,\overline{)\,2123} \\ 11 \\ \hline 102 \\ 33 \\ \hline 33 \\ 33 \\ \hline 0 \end{array}$$

（５）

$$\begin{array}{r} 30 \\ 13\,\overline{)\,1113} \\ 111 \\ \hline 3 \\ 0 \\ \hline 3 \end{array}$$

問題１３

（１）１０進法の３×３を２進法で表して計算をし，答えを２進法で表しなさい。

（２）１０進法の７×８を３進法で表して計算をし，答えを３進法で表しなさい。

問題１４

以下の１０進法の式を，５進法で表して計算をし，答えを５進法で表しなさい。

（１）１３×４

（２）２３×１９

問題１５

１０進法の式７２÷８を，３進法，５進法，６進法で表してそれぞれ計算をし，商を３，５，６進法の整数でそれぞれ表しなさい。

問題１６

１０進法の式９４÷９を，４進法，７進法，８進法で表してそれぞれ計算をし，商を４，７，８進法の整数でそれぞれ表し，余りも４，７，８進法でそれぞれ表しなさい。

問題１７

５進法で整数を表したとき，３けたの整数ａｂｃと１けたの整数ｄの積が４けたの整数ｅｅｅｅになりました。３けたの整数ａｂｃとして考えられるものをすべて答えなさい。

問題１８

２進法～１０進法のどれかで整数を表したところ，１以上の１けたの整数を５０倍すると必ず３けたの整数になりました。何進法で整数を表しましたか。ただし，ここでいう５０倍とは１０進法の５０にあたる整数をかけることです。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

Ｎ進法の整数と小数

３．Ｎ進法の小数

例題５　整数の除法と小数

１０進法では，３÷４＝0.７５となります。３÷４を３進法で表すと，１０÷１１です。小数部分についても，整数部分とくり上がり・くり下がりを同じように行うと，答えは0.２０２０…となります。

$$
\begin{array}{r}
0.2020\cdots \\
11\,\overline{)\,10} \\
\underline{22} \\
100 \\
\underline{22} \\
10
\end{array}
$$

0.２０２０…のように無限に続く小数を，次のように表します。

0.４４４４…⇒$0.\dot{4}$

0.３１２１２１２…⇒$0.3\dot{1}\dot{2}$

2.０１３２１３２１３２…⇒$2.0\dot{1}3\dot{2}$

よって，0.２０２０…は$0.\dot{2}\dot{0}$と表します。

（１）４÷９を３進法で表して計算しなさい。

（２）３÷４を６進法，８進法，９進法で表して計算しなさい。

解答（１）0.１１　（２）６進法…0.４３，８進法…0.６　９進法…$0.\dot{6}$

解説

（１）１０進法の４÷９は３進法では１１÷１００ですから，次のようになります。

$$
\begin{array}{r}
0.11 \\
100\,\overline{)\,11} \\
\underline{100} \\
100 \\
\underline{100} \\
0
\end{array}
$$

以下では，Ｎ進法の小数を，小数部分を整数部分とくり上がり・くり下がりを同じように行うものとします。

（２）それぞれ，次のようになります。

```
６進法            ８進法            ９進法
     ０.４３           ０.６            ０.６６…
 ４）３           ４）３           ４）３
    ２４              ３０             ２６
     ２０               ０              ３０
     ２０                               ２６
       ０                                ３０
                                          …
```

問題１９

１０進法で表した以下の割り算を９進法で表して計算しなさい。

（１）１６０÷３６

（２）７０÷５４

問題２０

１０進法で表した以下の割り算を４進法，６進法でそれぞれ表して計算しなさい。

（１）３９÷１２

（２）１１５÷４０

問題２１

１０進法で表した以下の割り算を３進法，４進法，６進法でそれぞれ表して計算しなさい。

（１）１０÷１８

（２）２１÷２４

（３）３４÷７２

問題２２

次の□にあてはまる数を答えなさい。

（１）５進法の式：（□＋１.２３）÷１.１＝２.３

（２）９進法の式：（３.６３－□）×１２.１＝３.３７７

例題６　小数と分数

３進法において１２１÷１０００＝0.１２１です。これを１０進法で表すと，１６÷２７ですから，分数で表すと$\dfrac{16}{27}$です。このことをもう少しよく見てみます。３進法の１２１とは，９×１＋３×２＋１×１ですから，１２１÷１０００は次の分数の計算にあたります。

$$\frac{9\times1+3\times2+1\times1}{27}=\frac{9}{27}\times1+\frac{3}{27}\times2+\frac{1}{27}\times1=\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{9}\times2+\frac{1}{27}\times1$$

よって，0.１２１の小数第１位は$\dfrac{1}{3}$が１個，小数第２位は$\dfrac{1}{9}$が２個，小数第３位は$\dfrac{1}{27}$が１個あるということを意味していると言えます。次の問いに答えなさい。

（１）$\dfrac{77}{81}$を３進法で表しなさい。

（２）２進法～９進法のうちで，１０進法の0.６２５を有限小数（無限に続くことのない小数）で表せるものを選び，それぞれの有限小数を答えなさい。

解答（１）0.２２１２　（２）２進法…0.１０１，４進法…0.２２，６進法…0.３４３，８進法…0.５

解説

（１）$\dfrac{77}{81}=\dfrac{27\times2+9\times2+3\times1+1\times2}{81}=\dfrac{1}{3}\times2+\dfrac{1}{9}\times2+\dfrac{1}{27}\times1+\dfrac{1}{81}\times2$より，0.２２１２です。

（２）引き続き３進法について考えます。３進法の有限小数で表せる分数は，

$\dfrac{1}{3}\times○+\dfrac{1}{9}\times△+\cdots+\dfrac{1}{3\times\cdots\times3}\times□=\dfrac{◇}{3\times\cdots\times3}$となるので，分母が３×…×３です。１０進法の0.６２５を分数にすると$\dfrac{5}{8}$ですが，$\dfrac{5}{8}=\dfrac{◇}{3\times\cdots\times3}$は成り立ちません。よって，３進法の有限小数で１０進法の0.６２５を表すことはできません。

0.６２５＝$\dfrac{5}{8}$を有限小数で表せるのは，８＝２×２×２より，素因数分解をしたときに２が現れる数である２，４，６，８進法のみです。

○２進法…$\dfrac{5}{8}=\dfrac{4+1}{8}=\dfrac{1}{2}\times1+\dfrac{1}{4}\times0+\dfrac{1}{8}\times1$より，0.１０１です。

○４進法…$\dfrac{5}{8}=\dfrac{10}{16}=\dfrac{4\times2+1\times2}{16}=\dfrac{1}{4}\times2+\dfrac{1}{16}\times2$より，0.２２です。

○６進法…$\dfrac{5}{8}=\dfrac{135}{216}=\dfrac{36\times3+6\times4+1\times3}{216}=\dfrac{1}{6}\times3+\dfrac{1}{36}\times4+\dfrac{1}{216}\times3$より，0.３４３です。

○８進法…$\dfrac{5}{8}=\dfrac{1}{8}\times5$より，0.５です。

問題２３

次の問いに答えなさい。

（１）$\frac{61}{81}$を３進法，６進法，９進法でそれぞれ表しなさい。

（２）$\frac{567}{625}$を５進法，１０進法でそれぞれ表しなさい。

問題２４

２進法～１０進法のうちで，以下の分数を有限小数で表せるものを選び，それぞれの有限小数を答えなさい。ないときは，ないと答えなさい。

（１）$\frac{30}{49}$　（２）$\frac{23}{30}$　（３）$\frac{73}{100}$

問題２５

２進法～１０進法のうちで，１０進法で表した以下の割り算の答えを有限小数で表せるものを選び，それぞれの有限小数が小数第何位までの小数となるかを答えなさい。ないときは，ないと答えなさい。

（１）５１÷７５０

（２）３０÷８４

（３）４８÷７２９

問題２６

６進法のある小数の小数点を消して整数にしたところ，２つの数の差は６進法で２４４３.４３になりました。ある小数を求めなさい。

問題２７

７進法で数を表したとき，Ａ×Ａ＝ｂｂ.ｂｂになりました。Ａとして考えられるものをすべて答えなさい。

Ｎ進法の整数と小数

４．変則Ｎ進法

例題７　変則Ｎ進法の整数
　奇数番目の位には０～４，偶数番目の位には０，１のみを用いて，整数を１から順に表します。
　　１，２，３，４，１０，１１，１２，１３，１４，１００，１０１，…，４１４，１０００，…，
　　１４１４，１００００，…，４１４１４，１０００００，…
（１）３１０１４は何番目の整数ですか。

（２）１０進法の式３７×２７をこの記数法で表し，答えをこの記数法で計算しなさい。

（３）１０進法の式３７６÷８をこの記数法で表し，答えをこの記数法で計算しなさい。

解答（１）３５９番目　（２）１４１４１４　（３）４１２
解説
（１）奇数番目の位は５でくり上がり，偶数番目の位は２でくり上がるので，１番目の位から順に１の位，５の位，１０の位，５０の位，１００の位，…，となります。

位	100	50	10	5	1
	3	1	0	1	4

１００×３＋５０×１＋１０×０＋５×１＋１×４＝３５９より，３５９番目です。

（２）３７，２７はそれぞれこの記数法では，それぞれ３１２，２１２となります。
かけ算を筆算で順に考えていきましょう。３１２と１の位の２をかけると，次のようになります。

2×3+1＝7 でくり上がり

2×1＝2 でくり上がり

$$\begin{array}{r} 312 \\ \times\ 212 \\ \hline 1204 \end{array}$$

次に，３１２と５の位の１をかけますが，これは５の位の１が３１２個あるということです。５の位は２でくり上がるので，５の位から見ると位は次のようになります。

位	100	50	10	5
	↓	↓	↓	↓
位	20	10	2	1

よって，３１２は次のようにして１１３１となります。

位	10	5	1	→	20	10	2	1
	3	1	2	→	1	1	3	1

ここまでの筆算は，次のようになります。

```
  ３１２
×２１２
 １２０４
１１３１
```

最後に，３１２と１０の位の２をかけます。１０の位から見ると位は次のようになり，１の位の場合と変わりません。

位	500	100	50	10
	↓	↓	↓	↓
位	50	10	5	1

よって，３１２と１の位の２をかけたときと同じく，１２０４になります。

以上を筆算にまとめると次のようになり，３１２×２１２＝１４１４１４です。

```
    ３１２
  ×２１２
   １２０４
  １１３１
 １２０４
 １４１４１４
```

（３）３７６，８はこの記数法では，それぞれ３１２１１，１３となります。１，１０，１００の位からは１３は１３のままですが，５，５０の位からは次のようになって１３は４０です。

位	5	1	→	2	1
	1	3	→	4	0

よって，以下の筆算になります。

```
          ４１２
  １３）３１２１１  ←５０の位からは，１３は４０ですから，商は１０の位から始まります。
      ３０２        ←１０の位からは，１３は１３ですから，１３×４＝３０２です。
        １０１
        ４０        ←５の位からは１３は４０ですから，４０×１＝４０です。
          １１１
          １１１←１の位からは１３は１３ですから，１３×２＝１１１です。
              ０
```

問題２８

１番目の位には０か１，２番目の位には０～２，３番目の位には０～３，４番目の位には０～４，５番目の位には０～５のみを用いて，整数を１から順に表します。

１，１０，１１，２０，２１，１００，１０１，１１０，１１１，１２０，１２１，２００，…，３２１，１０００，…，４３２１，１００００，…，５４３２１

（１）全部で何個の整数が並びますか。

（２）以下の１０進法の式を，この記数法で表して計算をし，答えをこの記数法で表しなさい。

①　５＋５　　②　３×２　　③　１５×５

④　２０÷５　　⑤　２３４÷１８　　⑥　１３６÷８

問題２９

１番目の位には０～４，２番目の位には０～６，３番目の位には０～７，４番目の位には０～８のみを用いて，整数を１から順に表します。

１，２，３，４，１０，１１，…，６４，１００，…，７６４，１０００，…，８７６４

（１）全部で何個の整数が並びますか。

（２）以下の１０進法の式を，この記数法で表して計算をし，答えをこの記数法で表しなさい。

①　４３×７　　②　１２４×１３

③　１０５÷７　　④　２８８÷１２

例題８　変則Ｎ進法の小数

次のきまりにしたがって，小数を表します。

・小数第１，５，９，…位には０～１の整数を用い，２でくり上がる。

・小数第２，６，１０，…位には０～２の整数を用い，３でくり上がる。

・小数第３，７，１１，…位には０～４の整数を用い，５でくり上がる。

・小数第４，８，１２，…位には０～６の整数を用い，７でくり上がる。

（１）この記数法を用いて以下の１０進法の割り算の答えを小数で表すとき，小数第何位までの小数になりますか。有限小数で表せないときは，「表せない」と答えなさい。

ア…６÷１５　　イ…１０÷２８　　ウ…１０÷２２

エ…１４÷３６　　オ…７÷４８０

（２）この記数法ではどのような割り算の商を有限小数で表すことができますか。

解答（１）ア…小数第３位，イ…小数第４位，ウ…表せない，エ…小数第６位，オ…小数第１７位

（２）商を既約分数で表し，その分母を素因数分解したときに２，３，５，７しか現れない割り算

解説

（１）この記数法では，小数第１位から順に，$\frac{1}{2}$の位，$\frac{1}{6}$の位，$\frac{1}{30}$の位，$\frac{1}{210}$の位，$\frac{1}{420}$の位，…，となって，分母は２，３，５，７を順にかけ合わせた数になります。

ア…商を既約分数で表すと$\frac{2}{5}$です。分母の５は小数第３位の分母３０の約数ですから，小数第３位までの小数で表すことができます。

イ…商を既約分数で表すと$\frac{5}{14}$です。１４＝２×７ですから，小数第４位の２１０＝２×３×５×７の約数となります。よって，小数第４位までの小数で表すことができます。

ウ…商を既約分数で表すと$\frac{5}{11}$です。素数１１は各位の分母を素因数分解しても決して現れません。よって，有限小数で表すことはできません。

エ…商を既約分数で表すと$\frac{7}{18}$です。１８＝２×３×３ですから，小数第６位の２×３×５×７×２×３の約数となります。よって，小数第６位までの小数で表すことができます。

オ…商を既約分数で表すと$\frac{7}{480}$です。４８０＝２×２×２×２×２×３×５です。

$\boxed{2\times3\times5\times7}$×２×…の周期において，２が５個そろうのは，５番目の周期の２がかけられたときです。２は周期の１番目の数ですから，４×４＋１＝１７より，小数第１７位です。

（２）（１）を解ききることができた場合，解説は不要でしょう。

問題３０

次のきまりにしたがって，整数と小数を表します。

・整数の４けた目，８けた目，１２けた目，…と，小数第１，５，９，…位には０～１の整数を用い，２でくり上がる。

・整数の３けた目，７けた目，１１けた目，…と，小数第２，６，１０，…位には０～２の整数を用い，３でくり上がる。

・整数の２けた目，６けた目，１０けた目，…と，小数第３，７，１１，…位には０～４の整数を用い，５でくり上がる。

・整数の１けた目，５けた目，９けた目，…と，小数第４，８，１２，…位には０～６の整数を用い，７でくり上がる。

（１）この記数法を用いて以下の１０進法の整数・小数を表しなさい。

① １３５７　　② １３５.７　　③ １３.５７

（２）１０進法のある小数Ａをこの記数法で表したところ，小数第９位までの小数となりました。小数Ａは小数第何位までの小数ですか。

（３）１０進法の小数Ｂは小数第７位までの小数です。小数Ｂをこの記数法で表すと，小数第何位の小数になりますか。考えられるものをすべて答えなさい。

問題３１

小数点以下の位を以下のように定めます。

・小数第１，５，９，…位には０～１の整数を用い，２でくり上がる。

・小数第２，６，１０，…位には０～２の整数を用い，３でくり上がる。

・小数第３，７，１１，…位には０～４の整数を用い，５でくり上がる。

・小数第４，８，１２，…位には０～６の整数を用い，７でくり上がる。

この記数法を用いて$\dfrac{257298362999999\ 9}{257298363000000\ 0}$を表したところ，有限小数で表すことができました。この小数に６は何回現れますか。

問題３２

すべての整数÷整数の商を有限小数で表す方法を考えなさい。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

N進法の整数と小数・解答解説

１．整数と位取り

問題１（１）１２個　（２）２６６６４

（１）４つの位のうち，$\boxed{2}$のカードを置く２つの位をまず選び，次に$\boxed{1}$のカードを置く位を選べばよいので，$\dfrac{4\times3}{2\times1}$×２＝１２（個）です。

（２）４けたの整数が１２個あるので，どのカードも１２回ずついずれかの位に登場します。よって，各位には１２÷４＝３（回）ずつ登場します。

４けたの整数の和は，（１＋２×２＋３）×３３３３＝２６６６４です。

問題２　３８６６４

$\boxed{0}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$のカードの並びかえは，３×３×２×１＝１８（通り）です。$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$のカードは千の位に１８÷３＝６（回）ずつ登場します。また，４枚のカードはそれぞれ１８回登場しますから，$\boxed{0}$のカードは百・十・一の位に１８÷３＝６（回）ずつ登場します。よって，$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$のカードは百・十・一の位に（１８－６）÷３＝４（回）ずつ登場します。

よって１８個の整数の和は，（１＋２＋３）×６４４４＝３８６６４です。

問題３　（$\boxed{1}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$），（$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{5}$）

例題より，選んだカードに$\boxed{0}$が含まれない場合，３けたの整数の和は２２２の倍数になります。また，選んだカードに$\boxed{0}$が含まれる場合，３けたの整数の和は２１１の倍数になります。１７７６÷２２２＝８，１７７６÷２１１は割り切れませんから，選んだカードに$\boxed{0}$は含まれません。

８＝１＋２＋５＝１＋３＋４より，選んだ３枚のカードの組合せは，（$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{5}$），（$\boxed{1}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$）です。

問題４　（１，２，６），（１，３，５），（２，３，４），（５，５，８）

整数Ａに用いられる３つの数字の組合せとして考えられるものは，ａ，ｂ，ｃを０以外の１けたの整数とすると，（ａ，ｂ，ｃ），（ａ，ａ，ｂ），（ａ，ａ，ａ），（ａ，ｂ，０），（ａ，ａ，０）の５つの場合です。

○（ａ，ｂ，ｃ）の場合

３けたの整数の和は（ａ＋ｂ＋ｃ）×２２２です。１９９８÷２２２＝９，

９＝１＋２＋６＝１＋３＋５＝２＋３＋４より，（１，２，６），（１，３，５），（２，３，４）です。

○（ａ，ａ，ｂ）の場合

３けたの整数はＡを含めて３通りできるので，その和は（ａ＋ａ＋ｂ）×１１１です。

１９９８÷１１１＝１８，１８＝５＋５＋８より，（５，５，８）です。

○（ａ，ａ，ａ）の場合

３けたの整数はＡのみの１通りですから，和は１９９８にはなりません。

○（ａ，ｂ，０）の場合

３けたの整数はＡを含めて４通りでき，その和は（ａ＋ｂ）×２１１です。１９９８÷２１１は割り切れないので，条件を満たしません。

○（ａ，ａ，０）の場合

３けたの整数はＡを含めて２通りでき，その和はａ×２１１です。１９９８÷２１１は割り切れないので，条件を満たしません。

以上より，（１，２，６），（１，３，５），（２，３，４），（５，５，８）です。

問題５（１）１１　（２）５５３　（３）４０９５

（１）８×１＋４×０＋２×１＋１×１＝１１です。

（２）１２５×４＋２５×２＋５×０＋１×３＝５５３です。

（３）８進法の７７７７の次の数は１００００で，１００００は１０進法では（８×８×８×８）×１＝４０９６ですから，４０９６－１＝４０９５です。

問題６（１）１１００１００　（２）１０３０３　（３）２１６０

（１）６４×１＋３２×１＋１６×０＋８×０＋４×１＋２×０＋１×０＝１００より，１１００１００です。

（２）２５６×１＋６４×０＋１６×３＋４×０＋１×３＝３０７より，１０３０３です。

（３）３４３×２＋４９×１＋７×６＋１×０＝７７７より，２１６０です。

問題７（１）１３　（２）１６６　（３）２３１０

（１）２進法の１１１は１０進法では４×１＋２×１＋１×１＝７ですから，４進法では
　４×１＋１×３＝７より，１３です。

（２）５進法の３４２は１０進法では２５×３＋５×４＋１×２＝９７ですから，７進法では
　４９×１＋７×６＋１×６＝９７より，１６６です。

（３）９進法の６６６は１０進法では８１×６＋９×６＋１×６＝５４６ですから，６進法では
　２１６×２＋３６×３＋６×１＋１×０＝５４６より，２３１０です。

問題８　２２２２

３進法と４進法の位を順に並べると，次のようになります。

３進法	1	3	9	27	81	243	729	2187
４進法	1	4	16	64	256	1024	4096	

２７以上８０以下の整数は３進法では４けたとなり，６４以上２５６以下の整数は４進法では４けたとなります。よって，６４以上８０以下の整数は３進法でも４進法でも４けたです。以降はこのような範囲の重なりはありませんので，８０がけた数が同じになる最大の整数です。８０を３進法で表すと，２２２２です。

問題９　（０，１，５），（０，２，４），（０，６，６）

９進法の１３６６は１０進法では７２９×１＋８１×３＋９×６＋１×６＝１０３２です。素因数分解をすると１０３２＝２×２×２×３×４３です。現れた素数４３に気を付けて，場合分けをします。以下，ａ，ｂ，ｃは１から８までの整数とします。

○（ａ，ａ，ａ）（ａ，０，０）の場合

ａａａ，ａ００という３けたの整数のみができますから，１３６６にはなりません。

○（ａ，ａ，ｂ）の場合

並びかえてできる３通りの整数の和は

（ａ×２＋ｂ）×（８１＋９＋１）＝（ａ×２＋ｂ）×９１＝（ａ×２＋ｂ）×７×１３です。ａ×２＋ｂは４３より小さい整数ですから，（ａ×２＋ｂ）×７×１３は４３の倍数にはなりません。

○（ａ，ｂ，ｃ）の場合

並びかえてできる６通りの整数の和は

（ａ＋ｂ＋ｃ）×２×（８１＋９＋１）＝（ａ＋ｂ＋ｃ）×２×７×１３です。ａ＋ｂ＋ｃは４３より小さい整数ですから，（ａ＋ｂ＋ｃ）×２×７×１３は４３の倍数にはなりません。

○（ａ，ａ，０）の場合

並びかえてできる２通りの整数の和はａ×（８１×２＋９＋１）＝ａ×１７２＝ａ×２×２×４３ですから，１０３２÷１７２＝６より，（０，６，６）が条件を満たします。

○（ａ，ｂ，０）の場合

並びかえてできる４通りの整数の和は（ａ＋ｂ）×（８１×２＋９＋１）＝（ａ＋ｂ）×１７２＝（ａ＋ｂ）×２×２×４３ですから，１０３２÷１７２＝６より，ａ＋ｂ＝６ですから，（０，１，５）と（０，２，４）が条件を満たします。

２．整数の加減乗除

$\boxed{\text{問題１０}}$（１）１００１１　（２）１００１

（１）１０進法の１２＋７を２進法で表すと１１００＋１１１です。

$$\begin{array}{r} 1100 \\ +\quad 111 \\ \hline 10011 \end{array}$$

（２）１０進法の１６－７を２進法で表すと１００００－１１１です。

$$\begin{array}{r} 10000 \\ -\quad 111 \\ \hline 1001 \end{array}$$

$\boxed{\text{問題１１}}$（１）１１１１０　（２）３３３

（１）１０進法の６２４＋１５６を５進法で表すと４４４４＋１１１１です。

$$\begin{array}{r} 4444 \\ +\quad 1111 \\ \hline 11110 \end{array}$$

（２）１０進法の２０２－１０９を５進法で表すと１３０２－４１４です。

$$\begin{array}{r} 1302 \\ -\quad 414 \\ \hline 333 \end{array}$$

$\boxed{\text{問題１２}}$（１）１００１２１　（２）１１３１３

（１）１０進法の９３５＋１１４を４進法で表すと３２２１３＋１３０２です。

$$\begin{array}{r} 33213 \\ +\quad 1302 \\ \hline 100121 \end{array}$$

（２）１０進法の５５３－１７８を４進法で表すと２０２２１－２３０２です。

$$\begin{array}{r} 20221 \\ -\quad 2302 \\ \hline 11313 \end{array}$$

問題１３（１）１００１　（２）２００２

（１）１０進法の３は２進法では１１です。２ごとにくり上がる点に注意をすると，次のようになって１００１です。

```
   １１
 ×１１
   １１
 １１
１００１
```

（２）１０進法の７，８は３進法では２１，２２です。３ごとにくり上がる点に注意をすると，次のようになって２００２です。

```
   ２１
 ×２２
  １１２
 １１２
２００２
```

問題１４（１）２０２　（２）３２２２

（１）１０進法の１３，４は５進法では２３，４です。５ごとにくり上がる点に注意をすると，次のようになって２０２です。

```
  ２３
 ×　４
 ２０２
```

（２）１０進法の２３，１９は５進法では４３，３４ですから，次のようになって３２２２です。

```
   ４３
 ×３４
  ３３２
 ２３４
３２２２
```

問題１５　３進法…１００，５進法…１４，６進法…１３

３進法

```
      １００
２２）２２００
      ２２００
         ０
```

５進法

```
     １４
１３）２４２
     １３
     １１２
     １１２
        ０
```

６進法

```
     １３
１２）２００
     １２
      ４０
      ４０
       ０
```

問題１６　４進法…２２余り１０，７進法…１３余り４，８進法…１２余り４

４進法　　７進法　　８進法

$$\begin{array}{r} 22 \\ 21\overline{)1132} \\ \underline{102} \\ 112 \\ \underline{102} \\ 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ 12\overline{)163} \\ \underline{12} \\ 43 \\ \underline{36} \\ 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ 11\overline{)136} \\ \underline{11} \\ 26 \\ \underline{22} \\ 4 \end{array}$$

問題１７　１２４，２０２，３０３，４０４，４３２

５進法の１１１１は１０進法の１２５×１＋２５×１＋５×１＋１×１＝１５６にあたります。素因数分解をすると１５６＝２×２×３×１３ですから，ｅｅｅｅはｅ×２×２×３×１３です。ｄに注目をして場合分けをします。

〇ｄ＝１

ａｂｃ＝ｅ×２×２×３×１３＝ｅ×１５６となりますが，１５６は５進法の４けたの整数ですから，条件を満たしません。

〇ｄ＝２

ａｂｃ＝ｅ×２×３×１３となります。ｅ＝１のとき，１×２×３×１３＝７８は５進法では３０３です。こうして，３０３×２＝１１１１が成り立ちます。ｅが２以上の場合はｅ×２×３×１３が４けた以上になるため条件に反します。よって，ａｂｃとして考えられる整数は３０３です。

〇ｄ＝３

ａｂｃ＝ｅ×２×２×１３となります。ｅ＝１のとき，１×２×２×１３＝５２は５進法では２０２です。ｅ＝２のとき，２×２×２×１３＝１０４は５進法では４０４です。こうして，２０２×３＝１１１１，４０４×３＝２２２２が成り立ちます。ｅが３以上の場合は３×２×２×１３が４けた以上になるため条件に反します。よって，ａｂｃとして考えられる整数は２０２，４０４です。

〇ｄ＝４

ａｂｃ＝ｅ×３×１３となります。ｅ＝１のとき，１×３×１３＝３９は５進法では１２４です。ｅ＝２のとき，２×３×１３＝７８は５進法では３０３です。ｅ＝３のとき，３×３×１３＝１１７は５進法では４３２です。こうして，１２４×４＝１１１１，３０３×４＝２２２２，４３２×３＝３３３３が成り立ちます。ｅが４の場合は４×３×１３が４けた以上になるため条件に反します。よって，ａｂｃとして考えられる整数は１２４，３０３，４３２です。

以上より，１２４，２０２，３０３，４０４，４３２です。

問題１８　７進法

７進法の１以上の１けたの整数は１～６で，５０倍をすると５０～３００になります。７進法では４９より大きく３４３以下の整数が３けたですから，条件に当てはまります。６進法では５×５０＝２５０が６×６×６＝２１６より大きいの整数ですから４けたになります。また，８進法では１×５０＝５０は８×８＝６４未満の整数ですから２けたになります。こうして，７進法だけが条件を満たします。

３．Ｎ進法の小数

問題１９　（１）4.4　（２）1.26

（１）

```
       4.4
４０）１８７
     １７０
      １７０
      １７０
         0
```

（２）

```
        1.２６
６０）７７
     ６０
     １７０
     １３０
       ４００
       ４００
          0
```

問題２０　（１）４進法…3.1，６進法…3.１３　（２）４進法…2.3２，６進法…2.5１３

（１）４進法

```
       3.1
３０）２１３
     ２１０
        ３０
        ３０
         0
```

６進法

```
        3.１３
２０）１０３
     １００
        ３０
        ２０
       １００
       １００
          0
```

（２）４進法

```
          2.3２
２２０）１３０３
       １１００
        ２０３０
        １３２０
         １１００
         １１００
             0
```

６進法

```
         2.5１３
１０４）３１１
       ２１２
        ５５０
        ５３２
         １４０
         １０４
          ３２０
          ３２０
             0
```

問題２１

（１）３進法…0.12，４進法…$0.\dot{2}0\dot{3}$，６進法…0.32

（２）３進法…$0.\dot{2}\dot{1}$，４進法…0.32，６進法…0.513

（３）３進法…$0.11\dot{0}\dot{2}$，４進法…$0.1\dot{3}2\dot{0}$，６進法…0.25

（１）３進法

```
          0.12
200 ) 101
       200
       1100
       1100
          0
```

４進法

```
         0.2032…
102 ) 22
       210
       1000
        312
         220
         210
          100…
```

６進法

```
         0.32
30 ) 14
      130
       100
       100
         0
```

（２）３進法

```
          0.212…
220 ) 210
      1210
       1200
        220
        2100
        1210
          120…
```

４進法

```
           0.32
120 ) 111
       1020
          300
          300
            0
```

６進法

```
        0.513
40 ) 33
      320
       100
        40
         200
         200
           0
```

（３）３進法

```
            0.1102…
2200 ) 1021
        2200
        10100
         2200
          20000
          12100
            200…
```

４進法

```
            0.1320…
1020 ) 202
        1020
        10000
         3120
          2200
          2100
           1000…
```

６進法

```
         0.25
200 ) 54
       400
       1400
       1400
          0
```

問題２２ （１）1.3　（２）3.35

（１）$2.3 \times 1.1 = 3.03$，$3.03 - 1.23 = 1.3$より，$\boxed{}$ $= 1.3$です。

（２）$3.377 \div 12.1 = 0.27$，$3.63 - 0.27 = 3.35$より，$\boxed{}$ $= 3.35$です。

問題２３（１）３進法…０.２０２１，６進法…０.４３０４，９進法…０.６７

（２）５進法…０.４２３２，１０進法…０.９０７２

（１）

○３進法…$\frac{61}{81}=\frac{27\times2+9\times0+3\times2+1\times1}{81}=\frac{1}{3}\times2+\frac{1}{9}\times0+\frac{1}{27}\times2+\frac{1}{81}\times1$より，０.２０２１です。

○６進法…$\frac{61}{81}=\frac{976}{1296}=\frac{216\times4+36\times3+6\times0+1\times4}{1296}$

$=\frac{1}{6}\times4+\frac{1}{36}\times3+\frac{1}{216}\times0+\frac{1}{1296}\times5$より，０.４３０４です。

○９進法…$\frac{61}{81}=\frac{9\times6+1\times7}{81}=\frac{1}{9}\times6+\frac{1}{81}\times7$より，０.６７です。

（２）

○５進法…$\frac{567}{625}=\frac{125\times4+25\times2+5\times3+1\times2}{625}$

$=\frac{1}{5}\times4+\frac{1}{25}\times2+\frac{1}{125}\times3+\frac{1}{625}\times2$より，０.４２３２です。

○１０進法…$\frac{567}{625}=\frac{9072}{10000}$より，０.９０７２です。

問題２４（１）７進法…０.４２　（２）ない　（３）１０進法…０.７３

（１）４９を素因数分解すると，７×７です。２～１０までの整数のうちで，素因数分解に７が現れるのは７のみです。$\frac{30}{49}=\frac{7\times4+1\times2}{49}=\frac{1}{7}\times4+\frac{1}{49}\times2$より，０.４２です。

（２）３０を素因数分解すると，２×３×５です。２～１０までの整数のうちで，素因数分解に２，３，５が現れるものはありません。

（３）１００を素因数分解すると，２×２×５×５です。２～１０までの整数のうちで，素因数分解に２と５が現れるのは１０のみですから，０.７３です。

$\boxed{\text{問題２５}}$（１）１０進法…小数第３位　（２）ない

（３）３進法…小数第５位，６進法…小数第５位，９進法…小数第３位

（１）$51 \div 750 = \dfrac{51}{750} = \dfrac{17}{250}$です。２５０を素因数分解すると，２×５×５×５です。２～１０までの整数のうちで，素因数分解に２と５が現れるのは１０＝２×５のみです。２５０は２を１つと５を３つかけあわせてできる数で，１０は２と５を１つずつかけあわせてできる数ですから，

１０を３個かけると２と５が３個ずつになって$\dfrac{17}{250}$を$\dfrac{68}{1000}$＝０.０６８で表すことができます。よって，小数第３位です。

（２）$30 \div 84 = \dfrac{30}{84} = \dfrac{5}{14}$です。１４を素因数分解すると，２×７です。２～１０までの整数のうちで，素因数分解に２と７が現れるものはありません。

（３）$48 \div 729 = \dfrac{48}{729} = \dfrac{16}{243}$です。２４３を素因数分解すると，３×３×３×３×３です。２～１０までの整数のうちで，素因数分解に３が現れるのは３，６＝２×３，９＝３×３のみです。２４３は３を５つかけあわせてできる数ですから，３進法と６進法では小数第５位，９進法では５÷２＝２余り１より小数第３位までの小数で$\dfrac{16}{243}$を表すことができます。

$\boxed{\text{問題２６}}$ ２５.１３

整数と小数の差が小数第２位までの小数であることから，元の小数も小数第２位までの小数であることがわかります。小数点を消すことでけたは２つ上がるので，整数は元の小数の６×６＝３６（倍）になっています。よって，２４４３.４３は元の小数の３６－１＝３５（倍）です。３５を６進法で表すと５５ですから，２４４３.４３÷５５を６進法で計算して，２５.１３です。

$\boxed{\text{問題２７}}$ 2.6，5.5

ｂｂ.ｂｂ＝ｂ×１１.１１で，７進法において１１.１１は$7 + 1 + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{49} = \dfrac{400}{49} = \dfrac{20}{7} \times \dfrac{20}{7}$ですから，ｂｂ.ｂｂ＝$b \times \dfrac{20}{7} \times \dfrac{20}{7}$です。ｂは１，２，３，４，５，６のいずれかですから，Ａ×Ａ＝ｂｂ.ｂｂより，平方数の１か４です。

○ｂ＝１の場合

$A \times A = 1 \times \dfrac{20}{7} \times \dfrac{20}{7}$より$A = \dfrac{20}{7} = 2\dfrac{6}{7}$です。$2\dfrac{6}{7}$は７進法で表すと，2.6です。

○ｂ＝４の場合

$A \times A = 4 \times \dfrac{20}{7} \times \dfrac{20}{7}$より$A = 2 \times \dfrac{20}{7} = 5\dfrac{5}{7}$です。$5\dfrac{5}{7}$は７進法で表すと，5.5です。

５．変則Ｎ進法

問題２８ （１）７１９個　（２）①１２０　②１００　③３０１１　④２０　⑤２０１　⑥２２１

（１）位は順に，１，２，６，２４，１２０となります。５４３２１に１を加えると，１２０×６＝７２０になるので，７２０－１＝７１９（個）です。

（２）

①　５はこの記数法では２１です。

　２１
＋２１
１２０←１の位は１＋１＝２より１くり上がり０となり，２の位は１＋２＋２＝５より１くり上がり２となります。

②　３，２はこの記数法では１１，１０です。また，２の位からは次のようになって１１は１０です。

位	2	1	→	3	1
	1	1	→	1	0

よって，次の筆算より，１００です。

　１１
×１０
　　０
１０　←１０×１＝１０
１００

③　１５，５はこの記数法では２１１，２１です。また，２の位からは次のようになって２１１は１１１です。

位	6	2	1	→	12	3	1
	2	1	1	→	1	1	0

よって，次の筆算より，３０１１です。

　２１１
×　２１
　２１１
２２０　←１１０×２＝２２０
３０１１

④　２０，５はこの記数法では３１０，２１です。また，２の位からは次のようになって２１は１２です。

位	2	1	→	3	1
	2	1	→	1	2

よって，次の筆算より，２０です。

２０
２１）３１０
３１　←１２×２＝３１
0

⑤　２３４，１８はこの記数法では１４３００，３００です。また，２の位，６の位からは次のようになって３００は２２，２０です。

位	6	2	1	→	12	3	1	→		20	4	1
	3	0	0	→	1	2	0	→			4	2

よって，次の筆算より，２０１です。

２０１
３００）１４３００
１４０　←４２×２＝１４０
３００
３００←３００×１＝３００
0

⑥　１３６，8はこの記数法では１０２２０，１１０です。また，２の位，６の位からは次のようになって１１０は２２，２０です。

位	6	2	1	→	12	3	1	→		20	4	1
	1	1	0	→		2	2	→			2	0

よって，次の筆算より，２２１です。

２２１
１１０）１０２２０
４０　←２０×２＝４０
１２２
１１１←２２×２＝１１１
１１０
１１０←１１０×１＝１１０
0

問題２９（１）２５１９個　（２）①１０４１　②５６０２　③３０　④４４

（１）位は順に，１，５，３５，２８０となります。８７６４に１を加えると，２８０×９＝２５２０になるので，２５２０－１＝２５１９（個）です。

（２）

①　４３，7はこの記数法では１１３，１２です。また，５の位からは次のようになって１１３は６１です。

位	35	5	1	→	7	1
	1	1	3	→	6	1

よって，次の筆算より，１０４１です。

```
  １１３
×　１２
―――――
  ２３１
  ６１　 ←６１×１＝６１
―――――
１０４１
```

②　１２４，１３はこの記数法では３３４，２３です。また，５の位からは次のようになって３３４は２１５です。

位	35	5	1	→	56	7	1
	3	3	4	→	2	1	5

よって，次の筆算より，５６０２です。

```
  ３３４
×　２３
―――――
１２４２
４３３　 ←２１５×２＝４３３
―――――
５６０２
```

③　１０５，7はこの記数法では３００，１２です。また，５の位からは次のようになって１２は１０です。

位	5	1	→	7	1
	1	2	→	1	0

よって，次の筆算より，３０です。

```
      ３０
    ―――――
１２）３００
    ３０　　←１０×３＝３０
    ―――――
       ０
```

④　２８８，１２はこの記数法では１０１３，２２です。また，５の位からは次のようになって２２は１５です。

位	5	1	→	7	1
	2	2	→	1	5

よって，次の筆算より，４４です。

```
          ４４
２２ ）１０１３
        ６６   ←１５×４＝６６
        １２３
        １２３←２２×４＝１２３
            ０
```

問題３０

（１）①６０２３６　②１０４２.１１１　③１６.１０２０１１１　　（２）小数第３位

（３）小数第２５位，小数第２７位

（１）この記数法では，整数部分では１けた目は１の位，２けた目は７の位，３けた目は７×５＝３５より３５の位，４けた目は３５×３＝１０５の位，５けた目は１０５×２＝２１０の位，６けた目は２１０×７＝１４７０の位，…となります。

また，小数部分では，小数第１位から順に，$\frac{1}{2}$の位，$\frac{1}{6}$の位，$\frac{1}{30}$の位，$\frac{1}{210}$の位，$\frac{1}{420}$の位，…，となって，分母は２，３，５，７を順にかけ合わせた数になります。

① １３５７＝２１０×６＋１０５×０＋３５×２＋７×３＋１×６より，６０２３６です。

② 整数部分は，１３５＝１０５×１＋３５×０＋７×４＋１×２より，１０４２です。

小数部分は0.７＝$\frac{7}{10}$より，分母の１０＝２×５ですから，小数第３位の３０＝２×３×５の約数となって，小数第３位までの小数で表すことができます。$\frac{7}{10}=\frac{21}{30}=\frac{15\times1+5\times1+1\times1}{30}$より，0.１１１です。

以上より，１０４２.１１１となります。

③ 整数部分は，１３＝７×１＋１×６より，１６です。

小数部分は0.５７＝$\frac{57}{100}$より，分母の１００＝２×２×５×５ですから，小数第７位の２×３×５×７×２×３×５＝６３００の約数となって，小数第７位までの小数で表すことができます。$\frac{57}{100}=\frac{3591}{6300}=\frac{3150\times1+1050\times0+210\times2+30\times0+15\times1+5\times1+1\times1}{30}$より，0.１０２０１１１です。

以上より，１６.１０２０１１１となります。

（２）小数Ａは１０進法の小数ですから，分数にすると分母は２と５をいくつかかけ合わせた数となります。この記数法において小数第９位になるということは，９÷４＝２余り１より，２，３，５，７をかける周期が２回繰り返されて，さらに２を１回かけるということですから，約分をすると分母が２×２×２に５を０個から２個かけた数になるということです。よって，１０進法では１０００＝２×２×２×５×５×５より，小数第３位までの小数となります。

（３）小数Ｂを既約分数にして分母を素因数分解すると，少なくとも２か５の一方は７個現れます。５が７個現れる場合，５は２，３，５，７の周期の３番目の数ですから，４×６＋３＝２７より小数第２７位になります。また，５が６個以下で２が７個現れる場合は，２は周期の２番目の数ですから，４×６＋１＝２５より小数第２５位になります。

問題３１　６回

$\dfrac{2572983629999999}{2572983630000000}$は分子と分母の差が１ですから，既約分数です。小数第１位が$\dfrac{1}{2}$の位であることから始めて，分母は２，３，５，７，２，３，５，７，…と順にかけ算をした積になっています。積の１の位から位を上がっていき，０でない数が初めて現れるところまでがどのように変わっていくかに注目をします。

$$2 \xrightarrow{\times 3} 6 \xrightarrow{\times 5} 30 \xrightarrow{\times 7} 10 \xrightarrow{\times 2} 20 \xrightarrow{\times 3} 60 \xrightarrow{\times 5} 300 \xrightarrow{\times 7} 100 \xrightarrow{\times 2} 200 \quad \cdots$$

０ではない最初の数は，$\boxed{２，６，３，１}$，２，６，…と繰り返されます。また，０の個数は２×５＝１０であることより，５をかけるごとに１個増えます。分母の…３００００００００は３に０が７個ついていますから，周期の７回目の５までの積であることがわかります。よって，この小数は４×６＋３＝２７より小数第２７位まであります。また，分母との差が１であることから，０.$\boxed{１２４６}$１２…と１２４６が繰り返されます。周期の７回目の３個目の数までが現れるので，６は６回現れます。

問題３２

考えなければならないのは，位の決め方と，記号（数字）の作り方です。

位の決め方

シンプルなのは，小数第１位から順に$1\div 2=\frac{1}{2}$の位，$\frac{1}{2}\div 3=\frac{1}{6}$の位，$\frac{1}{6}\div 4=\frac{1}{24}$の位，…と整数で順に割り算をしていく方法です。この場合，整数の割り算Ｍ÷Ｎの商は，どんなに長くても小数(Ｎ－１)の位までの有限小数で表せるはずです。また，もう少し分母の大きさを抑えるのであれば，２以上の整数の列２，３，４，５，６，７，８，９．１０．１１…を素因数分解して２，３，２×２，５，２×３，７，２×２×２，３×３，２×５，１１，…として，すでに表れている素数の個数を除くと，２，３，２，５，なし，７，２，３，なし，１１…となるので，

$1\div 2=\frac{1}{2}$の位，$\frac{1}{2}\div 3=\frac{1}{6}$の位，$\frac{1}{6}\div 2=\frac{1}{12}$の位，$\frac{1}{12}\div 5=\frac{1}{60}$の位，$\frac{1}{60}\div 7=\frac{1}{420}$の位，$\frac{1}{420}\div 2=\frac{1}{840}$の位，$\frac{1}{840}\div 3=\frac{1}{2520}$の位，$\frac{1}{2520}\div 11=\frac{1}{27720}$の位，…とすることもできます。他にもいろいろとあると思います。

記号（数字）の決め方

１０より大きい素数，例えば１１で割り算をしてできる位は，１１でくり上がるので，数字が０～９では足りません。１０をくり上がりを使わずに表す記号が必要になります。１３でくり上がる場合はさらに１１と１２も必要，…となるので，数字が無限に必要になります。例えば，１０は　　，１１は　　，…という方法で数字をいくらでも作る規則を決める必要があります。

１つ例を見てみましょう。小数第１位から順に$\frac{1}{2}$の位，$\frac{1}{6}$の位，$\frac{1}{12}$の位，$\frac{1}{60}$の位，$\frac{1}{420}$の位，$\frac{1}{840}$の位，$\frac{1}{2520}$の位，$\frac{1}{27720}$の位，…とした場合，$10\div 11=\frac{10}{11}=\frac{25200}{27720}$ですから，

$$\frac{25200}{27720}=\frac{13860\times 1+4620\times 2+2310\times 0+462\times 4+66\times 3+33\times 1+11\times 1+1\times 10}{27720}$$

＝0.１２０４３１１ となります。