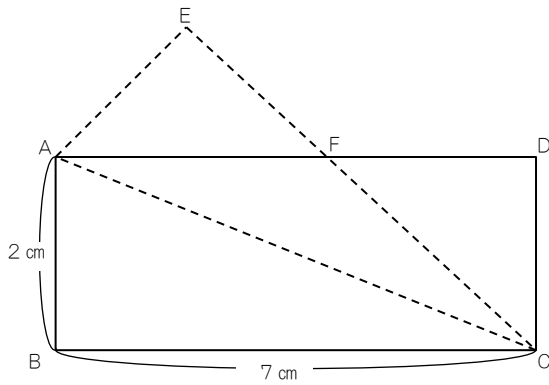


## 最難関問題

3 辺が整数比の直角三角形・5

下の図の長方形  $ABCD$  は、辺  $AB$  の長さが  $2\text{ cm}$ 、辺  $BC$  の長さが  $7\text{ cm}$  です。対角線  $AC$  を折り目として頂点  $B$  を折り返すと、頂点  $B$  は点  $E$  の位置にきます。辺  $AD$  と  $EC$  の交わる点を  $F$  とするとき、 $DF$  および  $CF$  の長さを求めなさい。



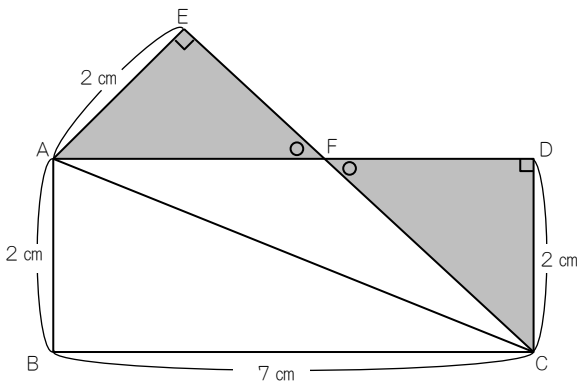
最難関問題

3 辺が整数比の直角三角形・5  $DF \cdots \frac{45}{14} \text{cm}$ ,  $CF \cdots \frac{53}{14} \text{cm}$

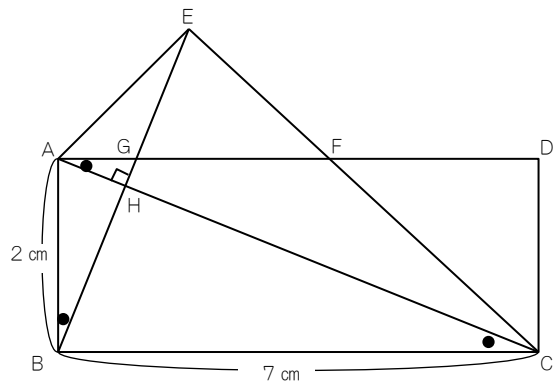
図①のかげをつけた三角形 AEF と CDF は合同なので、 $DF = EF$ ,  $CF = AF$  です。図②のように辺 AD と BE の交わる点を G, 対角線 AC と BE の交わる点を H とすると、●印をつけた角の大きさは等しいので、直角三角形の相似により、 $GH : HA = 2 : 7$ ,  $HA : HB = 2 : 7$  となって、 $GH : HA : HB = (2 \times 2) : (2 \times 7) : (7 \times 7) = 4 : 14 : 49$  です。よって、

$$GA = 7 \times \frac{4}{49} = \frac{4}{7} \text{ (cm) です。}$$

図①



図②



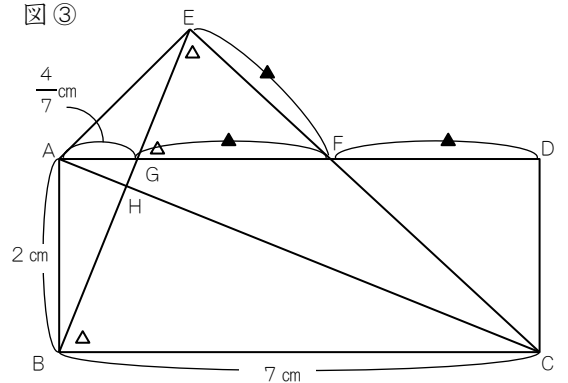
図③の△印をつけた角は、折り返しおよび平行線の同位角の関係によって等しいので、三角形 FEG は  $FE = FG$  の二等辺三角形です。よって、図③の▲の辺の長さはすべて等しいことがわかり、

$$DF = (7 - \frac{4}{7}) \div 2 = \frac{45}{14} \text{ (cm) です。また、EC の長さは}$$

7 cm で、EF の長さが  $\frac{45}{14} \text{cm}$  であることから、

$$CF = 7 - \frac{45}{14} = \frac{53}{14} \text{ (cm) です。}$$

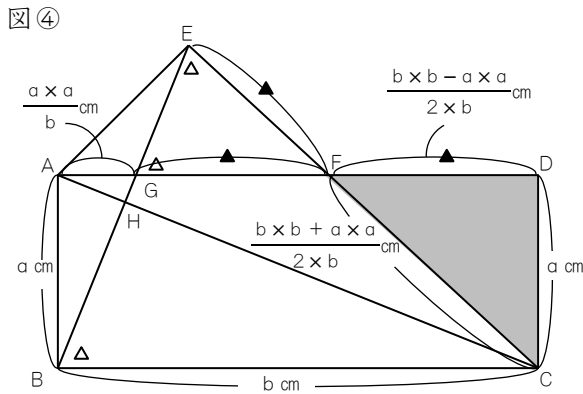
図③



最難関問題

解説は以上ですが、この問題では、長方形の2辺の長さを与えるだけで、直角三角形CDFの3辺の長さをすべて求めることができました。つまり、2つの整数をきめれば、そこから直角三角形の3辺の長さの整数比を求めることができるということです。ABの長さをa、BCの長さをbとして式で表すと、図④のようになります。3辺の長さの比は、次のようになります。

$$a : \frac{b \times b - a \times a}{2 \times b} : \frac{b \times b + a \times a}{2 \times b} = (2 \times a \times b) : (b \times b - a \times a) : (b \times b + a \times a)$$



この式にしたがって整数比を計算すると、以下のようになります。

a	b	$2 \times a \times b$	$b \times b - a \times a$	$b \times b + a \times a$
1	2	4	3	5
1	3	6	8	10
1	4	8	15	17
2	3	12	5	13
2	5	20	21	29
2	7	28	45	53
3	4	24	7	25

なお、サイトにアップしてあるエクセルシートの「ピタゴラス数」は、この方法で整数比を計算できるようになっています。