

## 最難関問題

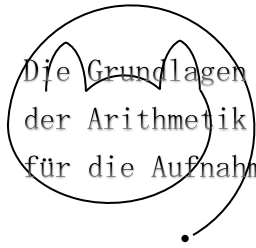
### 等比数列と合同算術・2

1, 3, 9, 27, 81, …と, 1から順に数を3倍していき, それぞれを6559で割ったときの余りを並べた数列Aを作ります。

数列A: 1, 3, 9, 27, 81, …

以下の問いに答えなさい。

- (1) 数列Aの10番目の数を答えなさい。
- (2) 数列Aの25番目の数を答えなさい。
- (3) 数列Aにはじめて864が現れるのは, 何番目ですか。
- (4) 数列Aにはじめて4069が現れるのは, 何番目ですか。



## 最難関問題

等比数列と合同算術・2 (1) 6 (2) 8 (3) 44番目 (4) 91番目

(1) 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187までは6559よりも小さいので, そのまま6559で割ったときの余りになります。9番目の数は $2187 \times 3 = 6561$ で, 6559で割ると,  $6561 \div 6559 = 1$ 余り2となるので, 数列Aの9番目の数は2です。

6559で割って2余る数を3倍した数を6559で割ると, 余りは $2 \times 3 = 6$ となるので, 数列Aの10番目の数は6です。

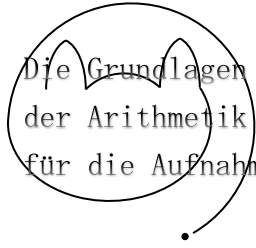
(2) 10番目以降も同様に続けていくと, 数列Aの16番目までは以下のようにになります。

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187,  
2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458, 4374,

17番目の数は,  $4374 \times 3 = 13122$ ,  $13122 \div 6559 = 2$ 余り4より4なので, 23番目までは次のようになります。

4, 12, 36, 108, 324, 976, 2916

24番目の数は,  $2916 \times 3 = 8748$ ,  $8748 \div 6559 = 1$ 余り2189より2189です。  
25番目の数は,  $2189 \times 3 = 6567$ ,  $6567 \div 6559 = 1$ 余り8より8です。



## 最難関問題

(3) 数列Aの25番目までの数を並べると、以下のようになります。

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187,  
 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458, 4374,  
 4, 12, 36, 108, 324, 976, 2916, 2189,  
 8, ……

ここで、3を8個かけあわせた数である6561に注目します。 $6561 \div 6559 = 1$ 余り2より、6561は6559で割ると2余る数です。3を16個かけた数は、

$$\underbrace{3 \times \dots \times 3}_{16 \text{ 個}} = \underbrace{3 \times \dots \times 3}_{8 \text{ 個}} \times \underbrace{3 \times \dots \times 3}_{8 \text{ 個}} = 6561 \times 6561$$

となるので、6559で割った余りは $2 \times 2 = 4$ です。3を24個かけた数なら

$$\underbrace{3 \times \dots \times 3}_{24 \text{ 個}} = \underbrace{3 \times \dots \times 3}_{8 \text{ 個}} \times \underbrace{3 \times \dots \times 3}_{8 \text{ 個}} \times \underbrace{3 \times \dots \times 3}_{8 \text{ 個}} = 6561 \times 6561 \times 6561$$

となるので、6559で割った余りは $2 \times 2 \times 2 = 8$ です。

こうして、数列Aは8個の数ごとに以下のような規則性を持ちます。

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187,  
 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458, 4374,  
 4, 12, 36, 108, 324, 976, 2916, 2189,  
 8, ……  
 16, ……  
 32, ……  
 64, ……  
 128, ……

$864 \div 3 = 288$ ,  $288 \div 3 = 96$ ,  $96 \div 3 = 32$ なので、

864は $8 \times 5 + 4 = 44$  (番目)に現れます。また、32が数列Aのどこかに現れた場合、その8個前は16、さらに8個前は8、…となるので、32が数列Aに最初に現れるのは、 $8 \times 5 + 1 = 41$  (番目)です。よって、864が最初に現れるのは44番目です。

## 最難関問題

(4) 数列Aに並ぶ数は、左の数の3倍であるか、左の数の3倍を6559で割った余りであるかのいずれかです。左の数は6559よりは小さいので、左の数の3倍を6559で割ったときの商は1か2です。また、6559は3で割ると1余る数なので、以下が成り立ちます。

$$\square \rightarrow \square \times 3 \cdots 3 \text{ の倍数}$$

$$\square \rightarrow \square \times 3 - 6559 \cdots 3 \text{ の倍数} + 2$$

$$\square \rightarrow \square \times 3 - 6559 \times 2 \cdots 3 \text{ の倍数} + 1$$

4609は3で割ると1余る数なので、 $(4609 + 6559 \times 2) \div 3 = 5729$ です。

5729は3で割ると2余る数なので、 $(5729 + 6559) \div 3 = 4096$ です。

$4096 = \underbrace{2 \times \cdots \times 2}_{12 \text{ 個}}$ なので、 $8 \times 11 + 3 = 91$  (番目) です。