受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

等比数列と合同算術・２

　１，３，９，２７，８１，…と，１から順に数を３倍していき，それぞれを６５５９で割ったときの余りを並べた数列Ａを作ります。

　　　数列Ａ；１，３，９，２７，８１，…

　以下の問いに答えなさい。

（１）数列Ａの１０番目の数を答えなさい。

（２）数列Ａの２５番目の数を答えなさい。

（３）数列Ａにはじめて８６４が現れるのは，何番目ですか。

（４）数列Ａにはじめて４０６９が現れるのは，何番目ですか。

最難関問題

等比数列と合同算術・２　（１）６　（２）８　（３）４４番目　（４）９１番目

（１）１，３，９，２７，８１，２４３，７２９，２１８７までは６５５９よりも小さいので，そのまま６５５９で割ったときの余りになります。９番目の数は２１８７×３＝６５６１で，６５５９で割ると，６５６１÷６５５９＝１余り２となるので，数列Ａの９番目の数は２です。

６５５９で割って２余る数を３倍した数を６５５９で割ると，余りは２×３＝６となるので，数列Ａの１０番目の数は６です。

（２）１０番目以降も同様に続けていくと，数列Ａの１６番目までは以下のようになります。

１，　３，　９，　２７，　８１，２４３，　７２９，２１８７，
２，　６，１８，　５４，１６２，４８６，１４５８，４３７４，

１７番目の数は，４３７４×３＝１３１２２，１３１２２÷６５５９＝２余り４より４なので，２３番目までは次のようになります。

４，１２，３６，１０８，３２４，９７６，２９１６

２４番目の数は，２９１６×３＝８７４８，８７４８÷６５５９＝１余り２１８９より２１８９です。２５番目の数は，２１８９×３＝６５６７，６５６７÷６５５９＝１余り８より８です。

最難関問題

（３）数列Ａの２５番目までの数を並べると，以下のようになります。

　１，　３，　９，　２７，　８１，２４３，　７２９，２１８７，
　２，　６，１８，　５４，１６２，４８６，１４５８，４３７４，
　４，１２，３６，１０８，３２４，９７６，２９１６，２１８９，
　８，……

　ここで，３を８個かけあわせた数である６５６１に注目します。６５６１÷６５５９＝１余り２より，６５６１は６５５９で割ると２余る数です。３を１６個かけた数は，

$$\underbrace{3\times\cdots\times3}_{16\text{個}}=\underbrace{3\times\cdots\times3}_{8\text{個}}\times\underbrace{3\times\cdots\times3}_{8\text{個}}=6561\times6561$$

となるので，６５５９で割った余りは２×２＝４です。３を２４個かけた数なら

$$\underbrace{3\times\cdots\times3}_{24\text{個}}=\underbrace{3\times\cdots\times3}_{8\text{個}}\times\underbrace{3\times\cdots\times3}_{8\text{個}}\times\underbrace{3\times\cdots\times3}_{8\text{個}}=6561\times6561\times6561$$

となるので，６５５９で割った余りは２×２×２＝８です。

　こうして，数列Ａは８個の数ごとに以下のような規則性を持ちます。

　　１，　３，　９，　２７，　８１，２４３，　７２９，２１８７，
　　２，　６，１８，　５４，１６２，４８６，１４５８，４３７４，
　　４，１２，３６，１０８，３２４，９７６，２９１６，２１８９，
　　８，……
　１６，……
　３２，……
　６４，……
１２８，……

８６４÷３＝２８８，２８８÷３＝９６，９６÷３＝３２なので，
８６４は８×５＋４＝４４（番目）に現れます。また，３２が数列Ａのどこかに現れた場合，その８個前は１６，さらに８個前は８，…となるので，３２が数列Ａに最初に現れるのは，
８×５＋１＝４１（番目）です。よって，８６４が最初に現れるのは４４番目です。

最難関問題

（４）数列Ａに並ぶ数は，左の数の３倍であるか，左の数の３倍を６５５９で割った余りであるかのいずれかです。左の数は６５５９よりは小さいので，左の数の３倍を６５５９で割ったときの商は１か２です。また，６５５９は３で割ると１余る数なので，以下が成り立ちます。

□　→　□×３…３の倍数
□　→　□×３－６５５９…３の倍数＋２
□　→　□×３－６５５９×２…３の倍数＋１

４６０９は３で割ると１余る数なので，（４６０９＋６５５９×２）÷３＝５７２９です。
５７２９は３で割ると２余る数なので，（５７２９＋６５５９）÷３＝４０９６です。
４０９６＝$\underbrace{2\times\cdots\times2}_{12\text{個}}$ なので，８×１１＋３＝９１（番目）です。