

最難関問題

回転する棒の描く図形・2

図1のような長さが3 cmの細い棒ABがあります。この棒を、両端AとBを交代で中心にして回転させます。例えば、Aを中心に90度、Bを中心に90度、Aを中心に90度回転させると、図2のようになります。このように、回転させるときには直前の回転で通過した部分と重ならないようにします。

円周率を3.14として、次の問いに答えなさい。

図1

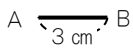


図2

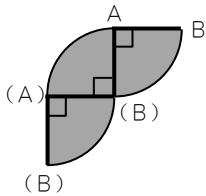
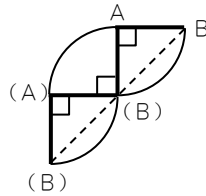


図3



(1) Aを中心に45度、Bを中心に30度回転させることを繰り返し行います。このとき、細い棒が通過してできる図形の面積は何 cm^2 ですか。

(2)

① (1)において棒が回転したときにBが中心となった位置を直線で結んでいきます。このような直線によって囲まれた図形の正確な名前を答えなさい。例えば、図2においてBが中心となった位置を直線で結ぶと、図3の点線になります。

② Aを中心に a 度、Bを中心に b 度回転させることを繰り返し行ったところ、Bが中心となった位置を結ぶ直線によって囲まれた図形は①で答えた図形になりました。また、細い棒が通過してできる図形の面積は(1)の $\frac{1}{3}$ になりました。 a, b の値を答えなさい。ただし、 a は b 以上とします。

最難関問題

回転する棒の描く図形・2 (1) 141.3 cm^2 (2) ①正24角形 ② $a = 20, b = 5$

(1) ある程度図をかいてみると、図①のようになります。○印をつけた角の大きさは2つで

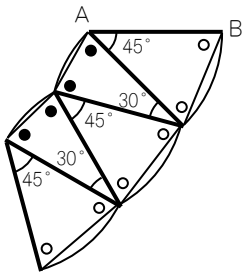
$180 - 45 = 135$ (度), ●印をつけた角の大きさは2つで $180 - 30 = 150$ (度) です。

$\circ \times 2 + 30 = 165$ (度) なので、Bを直線で結んでいくと、となりあう直線は165度の角を作ります。また、 $\bullet \times 2 + 45 = 195$ (度), $360 - 195 = 165$ (度) なので、Aを直線で結んでいっても、となりあう直線は165度の角を作ります。

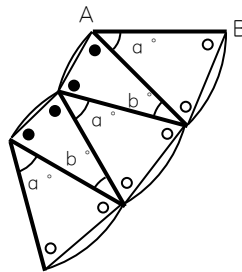
内角の大きさが165度ということは、 $360 \div (180 - 165) = 24$ より、Bを直線で結んでもAを直線で結んでも正24角形ができるということです。よって、中心角が45度のおうぎ形も中心角が30度のおうぎ形も24個になりますから、

$$3 \times 3 \times 3.14 \times \frac{45 + 30}{360} \times 24 = 141.3 \text{ (cm}^2\text{)} \text{ です。}$$

図①



図②



(2)

① (1) でみたように、正24角形です。

② BやAを結んだ直線によって正24角形ができる条件を考えます。図②のようにAを中心に回転するときの角度をa度、Bを中心に回転するときの角度をb度とします。○印をつけた角の大きさは2つで $(180 - a)$ 度, ●印をつけた角の大きさは2つで $(180 - b)$ 度です。

Bを結ぶ直線は、 $(180 - a + b)$ 度の角を作り、Aを結ぶ直線は、

$360 - (180 - b + a) = (180 - a + b)$ 度の角を作るので、どちらの大きさも等しくなります。 $180 - a + b = 165$ より、 $a - b = 15$ となるので、aとbの大きさの差が15度であれば、正24角形を作ることができます。

棒が通過した部分の面積が $\frac{1}{3}$ になるためには、aとbの和が $(45 + 30) \div 3 = 25$ (度) であればよいので、 $a = 20, b = 5$ です。