最難関問題

桁入れかえと回文数

４９，３６７，１２７８のように，大きい位の数より小さい位の数のほうが大きい整数を階段整数と呼ぶことにします。また，２２，３０３，７７７７のように，右から見ても左から見ても各位の数の並びが同じになっている整数を，回文数といいます。

（１）２桁の階段整数Ａと，Ａの各位の数を入れかえてできる整数の和が回文数になりました。整数Ａとして考えられる数は，何個ありますか。

（２）３桁の階段整数Ｂと，Ｂの各位の数を入れかえてできる整数の和が回文数になりました。整数Ｂとして考えられる数は，何個ありますか。

（３）６桁以上の階段整数Ｃと，Ｃの各位の数を入れかえてできる整数の和が回文数になることはありません。その理由をかんたんに説明しなさい。

最難関問題

桁入れかえと回文数　（１）２０個　（２）７個　（３）解説参照

（１）整数Ａをａｂとすると，ａｂとｂａの和は２桁か３桁の整数なので，２桁の回文数△△か，３桁の回文数△□△になる場合を考えます。

$$\begin{array}{rcc} & a & b \\ + & b & a \\ \hline & △ & △ \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} & & a & b \\ + & & b & a \\ \hline & △ & □ & △ \end{array}$$

ａｂ＋ｂａ＝△△となる場合，ａ＋ｂは繰り上がらない，つまりは９以下なので，

（ａ，ｂ）＝（１，２），（１，３），（１，４），（１，５），（１，６），（１，７），（１，８），（２，３），（２，４），（２，５），（２，６），（２，７），（３，４），（３，５），（３，６），（４，５）

の１６通りです。

ａｂ＋ｂａ＝△□△となる場合，２個の２けたの整数の和は最大でも９９＋９９＝１９８なので，△＝１です。ここで，これまでａｂ，ｂａと表してきた２桁の整数の構造を表すと，ａｂは１０×ａ＋ｂ，ｂａは１０×ｂ＋ａ，となります。よって，ａｂ＋ｂａは（１０×ａ＋ｂ）＋（１０×ｂ＋ａ）＝１１×ａ＋１１×ｂ＝１１×（ａ＋ｂ）となるので，１１の倍数であることがわかります。１□１の形をした１１の倍数は，１２１のみですから，１２１＝１１×（ａ＋ｂ）＝１１×１１より，ａ＋ｂ＝１１となります。よって，

（ａ，ｂ）＝（２，９），（３，８），（４，７），（５，６）の４通りです。

以上より，１６＋４＝２０（個）です。

（２）整数Ｂをａｂｃとすると，各位の数を入れかえてできる数は，ａｂｃ自身もふくめて６個あります。６個の整数の和が，３桁の回文数△□△か，４桁の回文数△□□△になる場合を考えます。

$$\begin{array}{rccc} & a & b & c \\ & a & c & b \\ & b & a & c \\ & b & c & a \\ & c & a & b \\ + & c & b & a \\ \hline & △ & □ & △ \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & & a & b & c \\ & & a & c & b \\ & & b & a & c \\ & & b & c & a \\ & & c & a & b \\ + & & c & b & a \\ \hline & △ & □ & □ & △ \end{array}$$

上のひっ算において，ａ，ｂ，ｃはいずれも一，十，百の位に２回ずつ現れているので，６個の整数の和は，（ａ＋ｂ＋ｃ）×２×１１１＝（ａ＋ｂ＋ｃ）×２２２となります。また，ａ＋ｂ＋ｃは最小で１＋２＋３＝６なので，６×２２２＝１３３２であることから，４桁の回文数△□□△のみを考えます。△□□△は，△×１００１＋□×１１０です。素因数分解をすると，１００１＝７×１１×１３，１１０＝２×５×１１なので，いずれも１１の倍数です。

最難関問題

よって，△×１００１＋□×１１０は１１の倍数です。それに対して，（ａ＋ｂ＋ｃ）×２２２の２２２は１１の倍数ではないので，ａ＋ｂ＋ｃが１１の倍数となります。ａ，ｂ，ｃはいずれも１けたの整数であることから，その和で１１の倍数であるものは，１１か２２です。

ａ＋ｂ＋ｃ＝１１の場合，

（ａ，ｂ，ｃ）＝（１，２，８），（１，３，７），（１，４，６），（２，３，６），（２，４，５）の５通りです。

ａ＋ｂ＋ｃ＝２２の場合，（ａ，ｂ，ｃ）＝（５，８，９），（６，７，９）の２通りです。

よって，５＋２＝７（個）です。

（３）Ｃが６桁の整数ａｂｃｄｅｆのとき，各位の数を入れかえてできる整数は，Ｃ自身もふくめて，６×５×４×３×２×１＝７２０（個）あり，ａ～ｆは各位にそれぞれ７２０÷６＝１２０（回）ずつ現れます。よって，その和は，（ａ＋ｂ＋ｃ＋ｄ＋ｅ＋ｆ）×１２０×１１１１１１となるので，一の位が必ず０になります。よって，回文数ではありません。

Ｃが７けた以上の場合も同様です。ＣがＮけたのとき，ＣとＣを入れかえてできる整数において，Ｃの各位の数は，((Ｎ－１）×（Ｎ－２）×…×５×４×３×２×１）回現れるので，５×２＝１０であることから，必ず１０の整数倍の回数現れます。よって，ＣとＣを入れかえてできる整数の和も１０の倍数となるため，回文数にはなりません。

解答例は次のようになります

> Ｃは６桁以上の整数なので，Ｃの各位の数の入れかえにおいて，それぞれの数は（１×２×３×４×５×…)回現れるので，ＣとＣの各位の数を入れかえてできる整数の和は２×５＝１０の倍数となる。一の位が０になるので，回文数ではない。

一の位が０になる，ということが理解できていると読み取れる答案であれば，正解です。