

## 最難関問題

### 和分解と順位・2

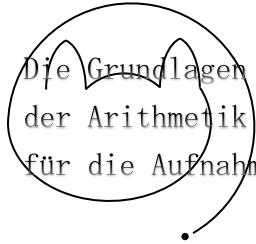
一列に並んでいる子どもたちに、前に並んでいる子どもほど多くなるように、用意したあめを全て配ります。ただし、一番後ろの子どもにも少なくとも1個のあめはあげるようにします。

- (1) あめを20個用意したところ、4人の子どもが並びました。それぞれの子どもがもらう可能性があるあめの個数のうち、最も多いものと少ないものを答えなさい。

順番（前から）	4	3	2	1
最多	個	個	個	個
最小	個	個	個	個

- (2) あめを100個用意したところ、10人の子どもが並びました。ある順番に並んだ子どもは、もらう可能性がある個数のうちで最も多いあめをもらい、すぐ後ろの子どもはそれより11個少なくあめをもらいました。2人がもらったあめの個数の組み合わせを答えなさい。

- (3) あめを5000個用意したところ、50人の子どもが並びました。ある順番に並んだ子どもは、もらう可能性がある個数のうちで最も多いあめをもらい、すぐ後ろの子どもはそれより100個少なくあめをもらいました。2人がもらったあめの個数の組み合わせをすべて答えなさい。



# 最難関問題

和分解と順位・2

(1)

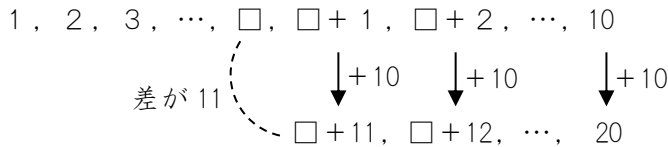
順番 (前から)	4	3	2	1
最多	3 個	5 個	8 個	14 個
最小	1 個	2 個	3 個	7 個

(2) (18 個, 7 個)

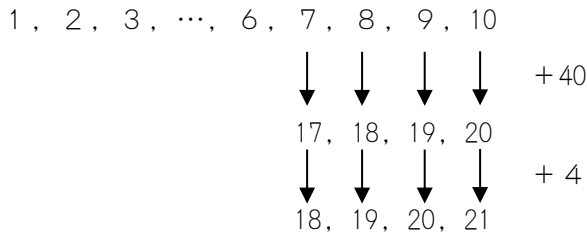
(3) (114 個, 14 個), (118 個, 18 個), (122 個, 22 個),  
(126 個, 26 個), (130 個, 30 個)

(1) 解説省略

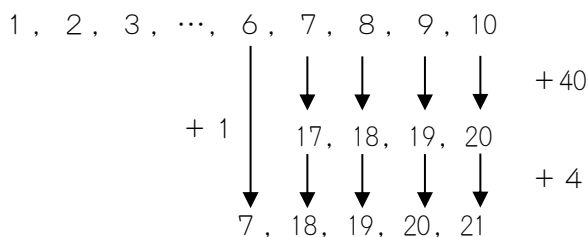
(2) 10人が少ない順に1個, 2個, 3個, ..., 10個と, 1から連続する整数の個数だけあめをもらった場合の合計は,  $1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 55$  (個)で, あと  $100 - 55 = 45$  (個)です。ここで, 下のように途中から配るあめの個数を10個ずつ増やすと, 差の11が生じます。

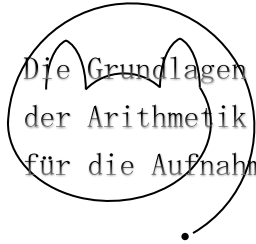


$45 \div 10 = 4$  余り 5 より, 上位4人のあめの個数を10個ずつ増やすと5個余るので, 4人にさらに1個ずつあめを配れます。行列の前から4番目の人のあめの個数は最も多くて18個です。



残りの,  $5 - 1 \times 4 = 1$  (個)のあめを5番目の人に配ると, 下のようになって, 差が11になります。よって, (18 個, 7 個)です。





## 最難関問題

(3) (2) と同様に考えます。50人が少ない順に1個, 2個, 3個, ..., 50個と, 1から連続する整数の個数だけあめをもらった場合の合計は,  $1 + 2 + 3 + \dots + 50 = 1275$  (個) で, あと,  $5000 - 1275 = 3725$  (個) です。ここで, 下のように途中から配るあめの個数を99個ずつ増やすと, 差の100が生じます。

$$\begin{array}{ccccccc}
 1, & 2, & 3, & \dots, & \square, & \square + 1, & \square + 2, & \dots, & 50 \\
 & & & & & \downarrow +99 & \downarrow +99 & & \downarrow +99 \\
 & & & & \text{差が } 100 & \square + 100, & \square + 101, & \dots, & 149
 \end{array}$$

$3725 \div 99 = 37$  余り  $62$  より, 上位37人のあめの個数を99個ずつ増やすと62個余るので, 37人にあと1個ずつあめを配ることができます。よって, 行列の前から37番目の人のあめの個数は最も多くて  $14 + 99 + 1 = 114$  (個) です。残りの,  $62 - 1 \times 37 = 25$  (個) のあめのうちの1個を38番目の人に配ると, 下のように差が100になります。さらに残った24個のあめは上位の人などに配ることができます。よって, (114個, 14個) です。

$$\begin{array}{ccccccc}
 1, & 2, & 3, & \dots, & 13, & 14, & 15, & \dots, & 50 \\
 & & & & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow + (99 \times 37) \\
 + 1 & & & & & 113, & 114, & \dots, & 149 \\
 & & & & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow + 37 \\
 & & & & & 14, & 114, & 115, & \dots, & 150
 \end{array}$$

続いて, 残りの場合を考えていきます。上位38人以上のあめの個数を99個ずつ増やすことは不可能なので, 上位36人以下の場合を考えます。

○上位36人の場合

$$\begin{array}{ccccccc}
 1, & \dots, & 14, & 15, & 16, & \dots, & 50 \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow + (99 \times 36) \\
 & & & & & & 62 + 99 = 161 \text{ 余る} \\
 & & & & & & \boxed{161 \div 36 = 4 \text{ 余り } 15} \\
 & & & & & & \downarrow + 4 \\
 & & & & & & 114, & 115, & \dots, & 149 \\
 & & & & & & \downarrow + 4 & \downarrow + 4 & \downarrow + 4 & \downarrow + 4 \\
 & & & & & & 18, & 118, & 119, & \dots, & 153
 \end{array}$$

ここでは, 161を36で割った余りの15が商の4以上なので, 前から37番目の人の個数を14個から4個増やして18個にできています。つまり,  $161 \div 36$  と  $161 \div (36 + 1)$  の商が等しいために, 前から36番目の人の個数を最多にしても, 37番目の人の個数を増やして差を10にできる, ということです。

# 最難関問題

上位35人以下の場合も同様に考えていきます。

## ○上位35人の場合

1, ..., 15, 16, 17, ..., 50

+ (99 × 35)

↓ ↓ ↓ ↓

115, 116, ..., 149

+ 7 + 7 + 7 + 7

↓ ↓ ↓ ↓

22, 122, 123, ..., 156

$161 + 99 = 260 \text{ 余る}$

$260 \div 35 = 7 \text{ 余り } 15$

$260 \div 36 = 7 \text{ 余り } 8$

## ○上位34人の場合

1, ..., 16, 17, 18, ..., 50

+ (99 × 34)

↓ ↓ ↓ ↓

116, 117, ..., 149

+ 10 + 10 + 10 + 10

↓ ↓ ↓ ↓

26, 126, 127, ..., 159

$260 + 99 = 359 \text{ 余る}$

$359 \div 34 = 10 \text{ 余り } 19$

$359 \div 33 = 10 \text{ 余り } 9$

## ○上位33人の場合

1, ..., 17, 18, 19, ..., 50

+ (99 × 33)

↓ ↓ ↓ ↓

117, 118, ..., 149

+ 13 + 13 + 13 + 13

↓ ↓ ↓ ↓

30, 130, 131, ..., 162

$359 + 99 = 458 \text{ 余る}$

$458 \div 33 = 13 \text{ 余り } 29$

$458 \div 34 = 13 \text{ 余り } 16$

## ○上位32人の場合

1, ..., 18, 19, 20, ..., 50

+ (99 × 32)

↓ ↓ ↓ ↓

118, 119, ..., 149

+ 16 + 17 + 17 + 17

↓ ↓ ↓ ↓

34, 135, 136, ..., 166

$458 + 99 = 557 \text{ 余る}$

$557 \div 32 = 17 \text{ 余り } 13$

$557 \div 33 = 16 \text{ 余り } 29$

こうして、上位32人の場合は条件を満たしません。これ以降も、割られる数が大きくなる一方で割る数は小さくなるので、商の差は広がっていきます。

以上より、(1 1 4個, 1 4個), (1 1 8個, 1 8個), (1 2 2個, 2 2個), (1 2 6個, 2 6個), (1 3 0個, 3 0個)が答えとなります。