

素数の個数と素因数分解・2

(「素数の個数と素因数分解・1」を先に解いておくことをおすすめします)

18を素因数分解すると、 $2 \times 3 \times 3$ となります。かけ算の式には、2が1個と3が2個現れています。このとき、 $[18] = (2 \times 1) \times (3 \times 2) = 12$ とします。次の問いに答えなさい。

(1) $[60]$, $[648]$ をそれぞれ計算しなさい。

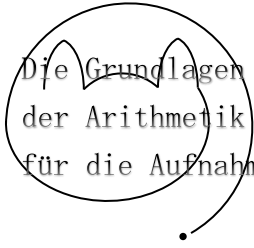
(2)

① $[A] \times 4 = A$ となるような、整数Aのうちで、最も小さいものを答えなさい。

② $[A] \times 8 = A$ となるような、整数Aのうちで、最も小さいものを答えなさい。

(3) $[C] \times 10 = C$ となるような、整数Cのうちで、最も小さいものを答えなさい。

(4) $[D] \times 273 = D$ となるような、整数Dのうちで、最も小さいものを答えなさい。



素数の個数と素因数分解・2

- (1) $[60] = 60$, $[648] = 72$ (2) ① 216 ② 800
 (3) 5400 (4) 59623200

(1) 次のようになります。

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \text{ より, } [60] = (2 \times 2) \times (3 \times 1) \times (5 \times 1) = 60$$

$$648 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \text{ より, } [648] = (2 \times 3) \times (3 \times 4) = 72$$

(2) $A = 2 \times \dots \times 2 \times 3 \times \dots \times 3 \times 5 \times \dots \times 5 \times \dots$ のとき, $\frac{A}{[A]}$ は次の式で計算できます。

$$\frac{A}{[A]} = \frac{2 \times \dots \times 2}{2 \times (\text{個数})} \times \frac{3 \times \dots \times 3}{3 \times (\text{個数})} \times \frac{5 \times \dots \times 5}{5 \times (\text{個数})} \times \dots$$

よって, $\frac{A}{[A]}$ が 4 や 8 になるためには, 上の式を計算した結果として, $\frac{2 \times \dots \times 2}{2 \times (\text{個数})}$ の分子の 2 が

2 個や 3 個残る必要があります。

①

$$\frac{A}{[A]} = 4 \text{ となる場合, } \frac{A}{[A]} = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 3} \times \dots \text{ の場合を考えて,}$$

$$\frac{A}{[A]} = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 3} \times \frac{3 \times 3 \times 3}{3 \times 3} = 4 \text{ となるときの, } A = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 216 \text{ が最小です。}$$

②

$$\frac{A}{[A]} = 8 \text{ となる場合, } \frac{A}{[A]} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 4} \times \dots \text{ では分子の 2 が 1 個しか残らないので,}$$

$$\frac{A}{[A]} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 5} \times \dots \text{ の場合を考えて,}$$

$$\frac{A}{[A]} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 5} \times \frac{5 \times 5}{5 \times 2} = 8 \text{ となるときの, } A = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 800$$

が最小です。

(3) $\frac{A}{[A]} = 10$ となるためには, $10 = 2 \times 5$ であることから, 少なくとも $\frac{A}{[A]} = \dots \times \frac{5 \times 5}{5 \times 2} \times \dots$

となっている必要があります。 $\frac{5 \times 5}{5 \times 2} = \frac{5}{2}$ ですから, 4倍すれば10になります。よって,

$$\frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 3} \times \frac{3 \times 3 \times 3}{3 \times 3} = 4 \text{ を利用して,}$$

$$\frac{A}{[A]} = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 3} \times \frac{3 \times 3 \times 3}{3 \times 3} \times \frac{5 \times 5}{5 \times 2} = 10 \text{ となるので,}$$

$A = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 216 \times 25 = 5400$ が最小です。

(4) $\frac{A}{[A]} = 273$ となるためには, $273 = 3 \times 7 \times 13$ であることから, 少なくとも

$$\frac{A}{[A]} = \dots \times \frac{3 \times 3}{3 \times 2} \times \dots \times \frac{7 \times 7}{7 \times 2} \times \dots \times \frac{13 \times 13}{13 \times 2} \times \dots \text{ となっている必要があります。}$$

$$\frac{3 \times 3}{3 \times 2} \times \frac{7 \times 7}{7 \times 2} \times \frac{13 \times 13}{13 \times 2} = \frac{273}{8} \text{ ですから, 8倍すれば273になります。よって,}$$

$$\frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 5} \times \frac{5 \times 5}{5 \times 2} = 8 \text{ を利用して,}$$

$$\frac{A}{[A]} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 5} \times \frac{3 \times 3}{3 \times 2} \times \frac{5 \times 5}{5 \times 2} \times \frac{7 \times 7}{7 \times 2} \times \frac{13 \times 13}{13 \times 2} = 273 \text{ となるので,}$$

$$A = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 13 \times 13$$

$$= 800 \times 273 \times 273 = 59623200 \text{ が最小です。}$$