受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

多角数と倍数の性質・２

下の図１のきまりにしたがって並ぶご石の数を，三角数といいます。１番目の三角数は１，２番目の三角数は３，３番目の三角数は６，４番目の三角数は１０です。ご石の代わりにマスを使うと，階段の形で表せます。図２は四角数，図３は五角数を表しており，それぞれマスを使って階段の形に並べかえると，四角数は上の段と下の段のマスの個数の差が２，五角数は３になります。同様にして，六角数では差が４，七角数では５，…，Ｎ角数ではＮ－２になります。

図１

１番目　２番目　３番目　４番目　…

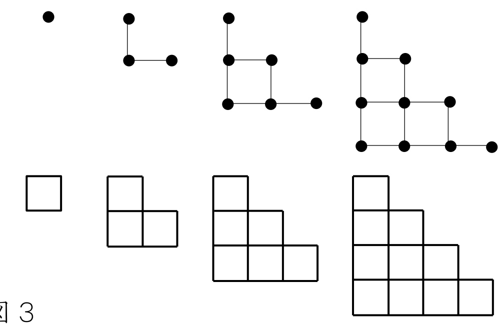


図２

１番目　２番目　３番目　４番目　…

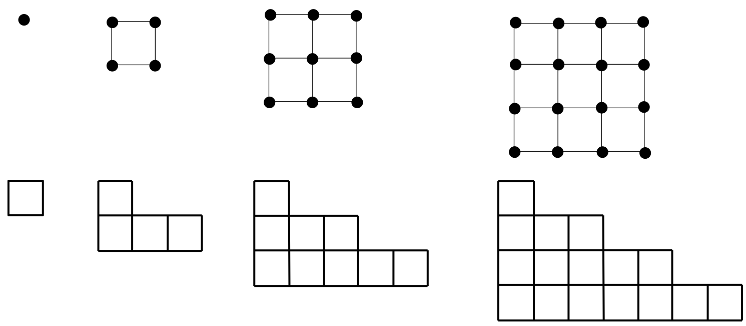
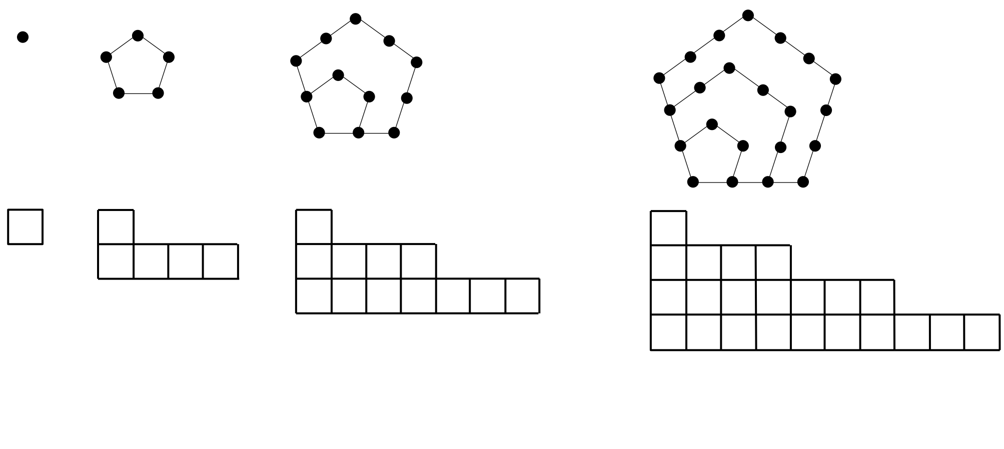


図３

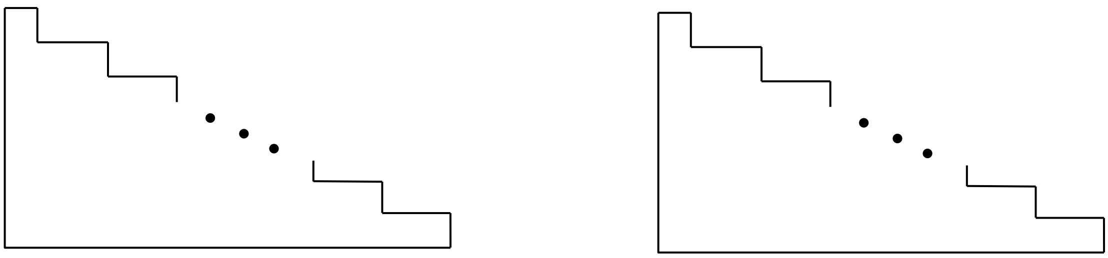
１番目　２番目　３番目　４番目　…



（問題は次のページから始まります）

最難関問題

（１）Ｎを偶数とします。すべての□番目のＮ角数は□の倍数であることを，下の図を利用して説明しなさい。



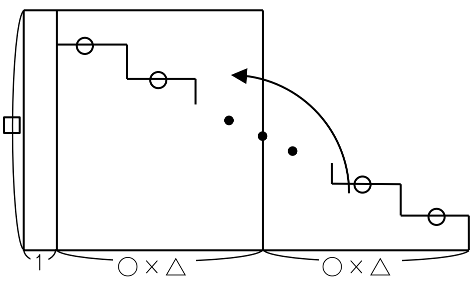
（２）Ｎを偶数とします。４番目のＮ角数が平方数になるとき，Ｎにあてはまる整数を小さい順に３つ答えなさい。

（３）Ｎを偶数とします。８番目のＮ角数が平方数になるとき，Ｎにあてはまる整数を小さい順に４つ答えなさい。

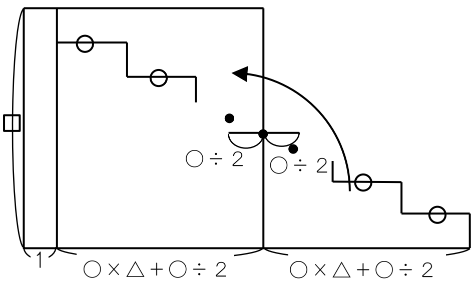
最難関問題

多角数と倍数の性質・２　（１）解説参照　（２）４，１２，１８　（３）４，１６，４８

（１）以下は解答例です。



□が奇数の場合，△×２＋１＝□，○＝Ｎ－２とすると，図のように縦が□で横が○×△＋１の長方形にマスを並びかえることができる。



□が偶数の場合，△×２＋２＝□，○＝Ｎ－２とすると，○は２で割り切れるので，図のように縦が□で横が○×△＋○÷２＋１の長方形にマスを並びかえることができる。

（２）４番目の多角数は４の倍数であり，４は平方数なので，４の倍数が平方数になるのは，ある整数Ｍについて，４×Ｍ×Ｍという形で表すことができる場合です。（１）の解説の図で考えると，
○×△＋○÷２＋１＝○×（△＋０.５）＋１が平方数Ｍ×Ｍになればよいことになります。４番目であることから，
△＝（４－２）÷２＝１なので，四角数から順に○×１.５＋１を求めていきます。
四角数…（４－２）×１.５＋１＝４　…よって，Ｎ＝４
六角数…（６－２）×１.５＋１＝７
八角数…（８－２）×１.５＋１＝１０
…
という等差数列になるので，十角数以降は１３，１６，１９，２２，２５，…となります。よって，４のときのＮ＝４，１６のときのＮ＝１２，２５のときのＮ＝１８が答えとなります。

最難関問題

（３）８番目の多角数は８の倍数なので，それが平方数になるのは，ある整数Ｍについて，８×２×Ｍ×Ｍ＝１６×Ｍ×Ｍとなる場合です。（２）と同様に考えると，〇×（△＋０.５）＋１が２×Ｍ×Ｍになればよいことになります。８番目であることから，△＝（８－２）÷２＝３なので，四角数から順に〇×３.５＋１を求めていきます。

四角数…（４－２）×３.５＋１＝８＝２×２×２　…よって，Ｎ＝４
六角数…（６－２）×３.５＋１＝１５
八角数…（８－２）×３.５＋１＝２２
…

という等差数列になります。十角数以降は２９，３６，４３，…となるので，７の倍数に１を加えた数が並びます。よって，２×Ｍ×Ｍであり，７の倍数＋１でもあるような数を探せばよいことになります。
２×２×２＝８，これは上で求めたＮ＝４の場合です。２×３×３＝１８，２×４×４＝３２は条件を満たさず，２×５×５＝５０は条件を満たし，２×６×６＝７２，２×７×７＝９８，
２×８×８＝１２８は条件を満たさず，２×９×９＝１６２，は条件を満たします。
５０の場合，４＋（５０－８）÷７×２＝１６よりＮ＝１６，
１６２の場合，４＋（１６２－８）÷７×２＝４８よりＮ＝４８なので，
Ｎは小さい順に，４，１６，４８です。