

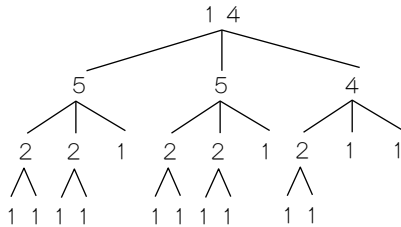
最難関問題

整数の三分割

整数を以下の規則にしたがって分けていきます。

- 3以上の整数は，3つの整数に分けます。このとき，どの2つの整数の差も0か1になるように分けます。
- 2は1と1に分けます。
- 1はそれ以上分けません。

例えば14を分けると4段になり，一番下の段には1が10個並びます。



(1) ①～③の整数を分けると，何段になりますか。また，一番下の段には1が何個並びますか。

- ① 2 7 ② 3 5 ③ 6 2

(2) 14を分けた場合，一番下の段に並んだ1の個数は10になります。一番下の段に並んだ1の個数が自分自身と等しくなるような1以上1000以下の整数は何個ありますか。

(3) 1000以下の整数で，一番下の段に並んだ1の個数が①～④になるものを，すべて答えなさい。
ないときは「ない」と答えなさい。

- ① 1 2 ② 1 3 ③ 5 5 5 ④ 2 0 0



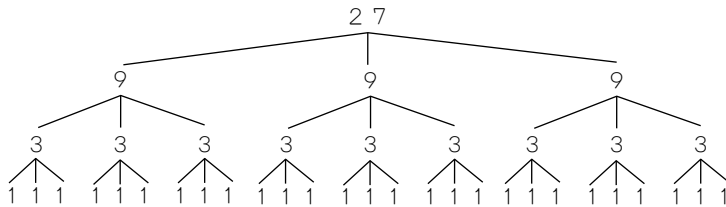
最難関問題

整数の三分割

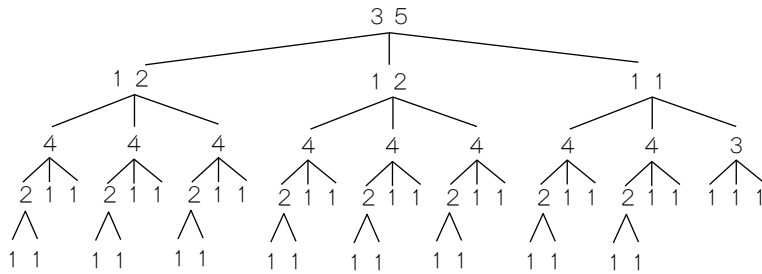
- (1) ① 4 段, 2 7 個 ② 5 段, 1 6 個 ③ 5 段, 6 2 個
 (2) 3 7 1 個
 (3) ① 1 5, 3 3, 8 7, 2 4 9, 7 3 5 ② ない ③ 5 5 5 ④ 2 0 0, 3 4 3, 8 2 9

(1)

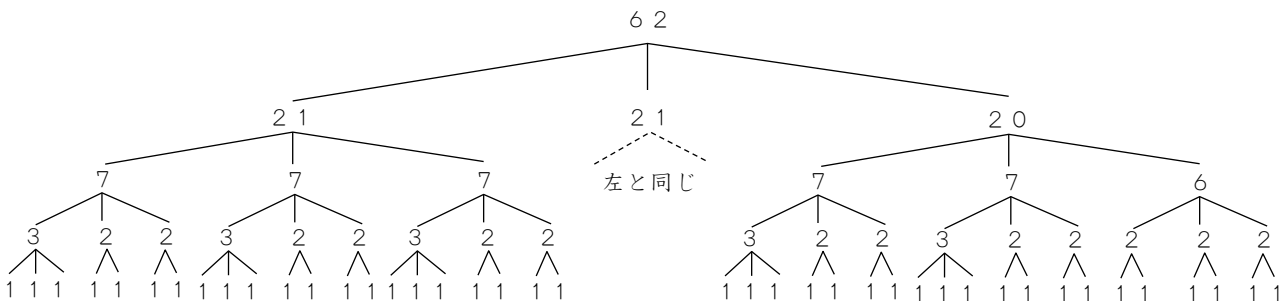
① 次のようになって, 4 段で 2 7 個です。



② 次のようになって, 5 段で 1 6 個です。

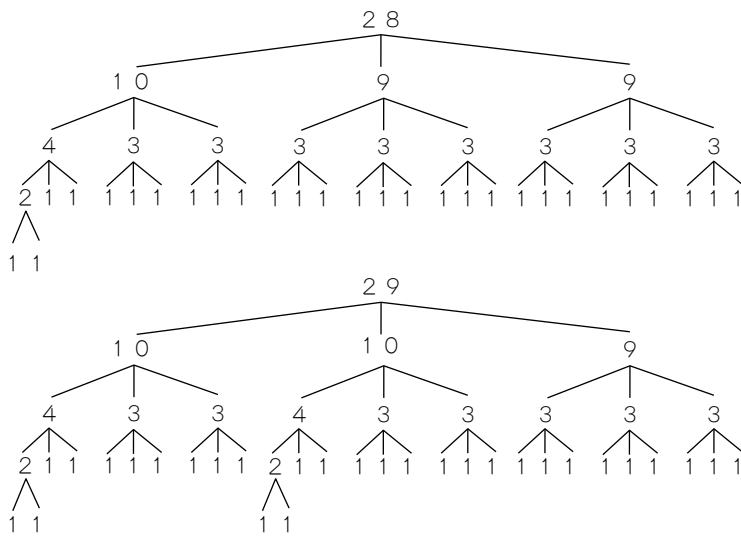


③ 次のようになって, 5 段で 6 2 個です。

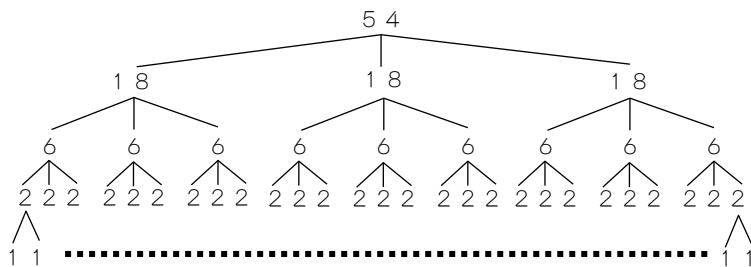


最難関問題

(2)(1)①の27の場合のように、3を何個かかけ合わせた数である3, 9, 27, 81, ...であれば、途中のどの段階でも3つの等しい数に分けることができます。28, 29と数を1つつ大きくすると、以下のように4段目に並んでいた27個の1が次々に2と変わっていき、5段目ができます。



28では4段目に2が1つあるので、5段目に並ぶ1は2個、29では4段目に2が2つあるので、5段目に並ぶ1は4個となります。こうして、28や29は、一番下の段に並ぶ1の個数と等しくなりません。数を順に考えていくと、次に等しくなるのは、4段目がすべて2となる54です。



54から81にかけては、4段目の2が次々と3に置き換わっていくので、やはり分ける数と一番下の段に並ぶ1の個数は一致し続けます。

よって、3をいくつかかけあわせた数Aに対して、 $(A \times 2)$ 以上 $(A \times 3)$ 以下の整数は自分自身と一番下の段に並ぶ1の個数が一致します。また、1, 2, 3もこの条件を満たしますから、

- 1~3...3個, 6~9...4個, 18~27...10個, 54~81...28個, 162~243...82個,
- 486~729...244個

以上の和を求めて、 $3 + 4 + 10 + 28 + 82 + 244 = 371$ (個) です。

最難関問題

(3) (2) の場合、〈分ける数、一番下の段に並ぶ1の個数〉は、

〈28, 2〉, 〈29, 4〉, 〈30, 6〉, …, 〈53, 52〉,
〈54, 54〉, 〈55, 55〉, …, 〈81, 81〉,
〈82, 2〉, 〈83, 4〉, …

となっています。3をいくつかかけあわせた数Aに対して、 $(A \times 2)$ 以上 $(A \times 3)$ 以下の整数は自分自身と一番下の段に並ぶ1の個数が一致することは確認済みですが、それ以外の数、つまり、Aより大きく $(A \times 2)$ 以下の整数の場合、一番下の段に並ぶ1の個数は2, 4, 6, …, という偶数になり、その最後は $(A \times 2 - 2)$ です。

- ① 12は9と27の間の数であり、 $9 \times 2 = 18$ より小さいので、 $(A \times 2)$ 以上 $(A \times 3)$ 以下の整数ではありません。よって、〈12, 12〉にはなりません。残るはAより大きく $(A \times 2)$ 以下の整数の場合の偶数の列に12が現れる場合です。12は6番目の偶数ですから、 $9 + 6 = 15$, $27 + 6 = 33$, $81 + 6 = 87$, $243 + 6 = 249$, $729 + 6 = 735$ が条件を満たします。
- ② 13は9と27の間の数であり、 $9 \times 2 = 18$ より小さいので、 $(A \times 2)$ 以上 $(A \times 3)$ 以下の整数ではありません。よって、〈13, 13〉にはなりません。残るはAより大きく $(A \times 2)$ 以下の整数の場合ですが、このとき一番下の段に並ぶ1の個数は必ず偶数になります。よって、「ない」が答えです。
- ③ 555は243と729の間の数であり、 $243 \times 2 = 486$ より大きいので、〈555, 555〉となります。
- ④ 200は81と243の間の数であり、 $81 \times 2 = 162$ より大きいので、〈200, 200〉となります。残るはAより大きく $(A \times 2)$ 以下の整数の場合の偶数の列に200が現れる場合です。200は100番目の偶数ですから、 $243 + 100 = 343$, $729 + 100 = 829$ が条件を満たします。