受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

フィボナッチ数列のｎ番目

次のような数列を考えます。

㋐…１，１，２，３，５，８，１３，２１，３４，…

㋑…３，２，５，７，１２，１９，３１，５０，８１，…

㋐，㋑の数列は，「前の２つの数の和が次の数になる」というきまりにしたがっています。このような数列を，フィボナッチ数列といいます。フィボナッチ数列は１番目と２番目の数を決めれば残りはすべて決まるので，㋐の数列を（１，１），㋑の数列を（３，２）と表すことにします。以下の問いに答えなさい。ただし，フィボナッチ数列の最初の２つの数は１以上の整数とします。

（１）（○，□）の数列の９番目の数を，○，□を用いた式で表しなさい。

（２）７番目の数が８９となるフィボナッチ数列をすべて答えなさい。

（３）３番目以降に８９が現れるフィボナッチ数列は，全部で何通りありますか。

最難関問題

フィボナッチ数列のｎ番目

（１）○×１３＋□×２１　（２）（５，８），（１３，３）　（３）１５９通り

（１）１番目から順に，○，□，○＋□，○＋□×２，○×２＋□×３，○×３＋□×５，○×５＋□×８，
○×８＋□×１３，○×１３＋□×２１となるので，○×１３＋□×２１です。

（２）（１，１）のフィボナッチ数列は，
（１，１）…１，１，２，３，５，８，１３，２１，３４，５５，８９，…
となります。（１，１）の数列の７番目の１３を○に，８番目の２１を□にかけると，（１）の
○×１３＋□×１２となって，（○，□）の９番目の数を求めることができます。（２）の場合は
（○，□）の７番目なので，（１，１）の数列の５番目の５を○に，６番目の８を□にかけた
○×５＋□×８＝８９となる場合を探します。
５×５＋８×８＝８９，１３×５＋３×８＝８９より，（５，８）と（１３，３）です。

（３）（２）と同様にして，３番目から順に８９が現れる場合を調べていきます。

３番目

（○，□）の数列の３番目は○＋□なので，８９を１以上の２つの整数に和分解をすればよいので，
（１，８８），（２，８７），…，（８８，１）の８８通りです。

４番目

（○，□）の数列の４番目は○×１＋□×２です。○が８７以下の奇数であればよいので，
（８７＋１）÷２＝４４（通り）です。

５番目

（○，□）の数列の５番目は○×２＋□×３です。□×３が８７以下の奇数であればよいので，
８７÷３＝２９より，□が２９以下の奇数である場合を求めて，（２９＋１）÷２＝１５（通り）です。

６番目

（○，□）の数列の６番目は○×３＋□×５です。以下のようになって，６通りです。

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ○ | ３ | ８ | １３ | １８ | ２３ | ２８ |
| □ | １６ | １３ | １０ | 7 | 4 | 1 |

７番目

（２）で求めた２通りです。

８番目

（○，□）の数列の８番目は○×８＋□×１３です。条件を満たすのは，（３，５）の１通りです。

９番目

（○，□）の数列の９番目は○×１３＋□×２１です。条件を満たすのは，（２，３）の１通りです。

１０番目

（○，□）の数列の１０番目は○×２１＋□×３４です。条件を満たすのは，（１，２）の１通りです。

１１番目

（○，□）の数列の１１番目は○×３４＋□×５５です。条件を満たすのは，（１，１）の１通りです。

以上より，８８＋４４＋１５＋６＋２＋１×４＝１５９（通り）です。