受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

継子立て

　図１のように，時計回りに１から順に番号を振った玉をいくつか円形に並べます。そして，１の玉から順に，１つとばして次の玉をとり，さらにその次の玉もとる，ということを，玉が１個になるまで繰り返します。

　図１の場合は１周目で図２のように２，３，５，６，８，９の玉がとられ，２周目に４，７の玉がとられるので，最後に残るのは１の玉です。

図１

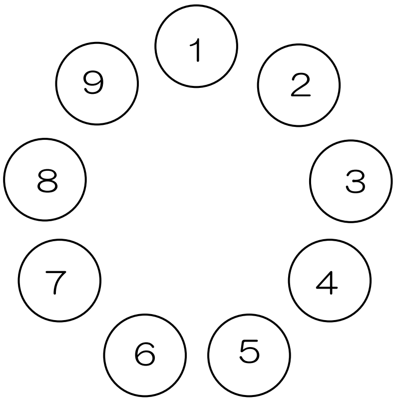


図２

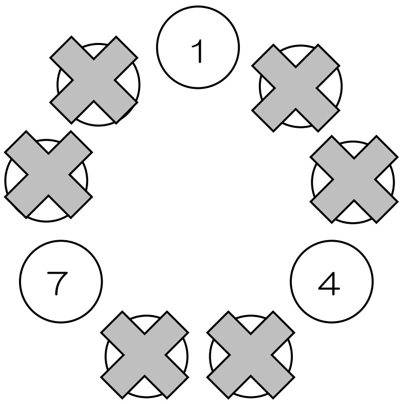
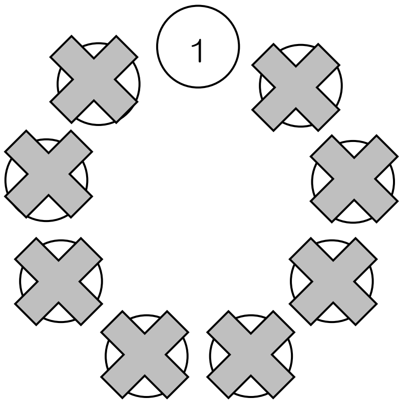


図３



（１）１５個の玉を並べた場合には，最後に残るのはどの玉ですか。また，１８個の玉を並べた場合には，最後に残るのはどの玉ですか。

（２）８１個の玉を並べた場合には，最後に残るのはどの玉ですか。

（３）最後に残るのが１の玉となる場合を考えます。

① 玉の個数がどのような数のときに，最後に１の玉が残りますか。

② ①以外の場合は，１の玉が最後に残らない理由をかんたんに説明しなさい。

最難関問題

継子立て　（１）１５個…１０の玉，１８個…１の玉　（２）１の玉　（３）解説参照

（１）表で表すと次のようになり，１５個の場合は１０の玉，１８個の場合は１の玉が最後に残ります。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	×	×		×	×		×	×		×	×		×	×
			×			×						×		
×														

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	×	×		×	×		×	×		×	×		×	×		×	×
			×			×						×			×		
									×								

（２）玉の個数が３の倍数のとき，１周すると玉の個数は$\frac{1}{3}$倍になります。また，最初の玉はとられずに残ります。８１÷３＝２７，２７÷３＝９なので,玉が残り９個になったときの最初の玉は１の玉なので，問題文の例と同じようにして，１の玉が最後に残ります。

最難関問題

（３）（２）に続けて考えると，玉が３個の場合も１の玉が最後に残るので，玉の個数が，素因数分解をしたときに３しか現れない数（３の累乗数）のときは１の玉が残ります。また，これは言及しなくてもかまわないのですが，玉の個数が１個のときも当然１の玉が残ります。

しかし，（１）で見た１８個の場合も，１の玉が残っています。１８個の場合，１８÷３＝６（個），６÷３＝２（個）となり，玉が２個の場合は１の玉を飛ばしてもう１つの玉をとるので，１の玉が最後に残ることになります。よって，２個，６個，１８個，５４個，…のように，玉の個数を素因数分解すると２が１つと３がいくつか現れる数の場合も，１の玉が最後に残ります。

では，これ以外の場合は成立しないのでしょうか。素因数分解をしたときに２が２個以上か，２以外の数が現れる個数の場合，３で何回か割っていくことで，必ず４以上の３の倍数ではない個数，つまり，（３の倍数＋１）か（３の倍数＋２）になります。この場合，玉を３個ずつの組にして太枠で囲うと，次のようになって１の玉は取られます。

（３の倍数＋１）の場合

1	2	3	4	5	6	…					
	×	×		×	×	…			×	×	
×											

（３の倍数＋２）の場合

1	2	3	4	5	6	…						
	×	×		×	×	…			×	×		×
×												

以上より，解答例は次のようになります。

① 玉の個数を素因数分解したときに，３がいくつか現れ，２が２個以上現れず，それ以外の素数は現れない場合。（※１個の場合への言及の有無は不問でよいでしょう）
玉の個数が３の累乗数か，３の累乗数の２倍か，２個の場合。
（※厳密には１も３の累乗数なので，「２個の場合」はなくても構いません。）

② ①以外では，何周目かで玉の残りの個数が３の倍数＋１か＋２になるので，１の玉はとられるから。