受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

六芒星

　１辺の長さがcmの単位で整数である正三角形の各辺の，頂点から１cmのところにある点を結んで，正三角形を作ります。例えば，１辺の長さが３cmのときは図１のようになります。このような正三角形を，「内側の正三角形」とよぶことにします。内側の正三角形は２個作ることができ，図２のように６個の角を持つ星形（六芒星）ができます。このとき，斜線で示した２つの三角形が重なっている六角形の面積は，１辺の長さが３cmの正三角形の$\frac{2}{9}$倍になります。１辺の長さが４cmの正三角形に同様の操作を行うと，図３のようになります。このような六角形を「内側の六角形」とよぶことにします。

図１

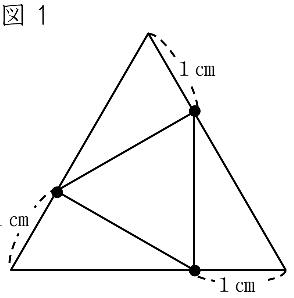


図２

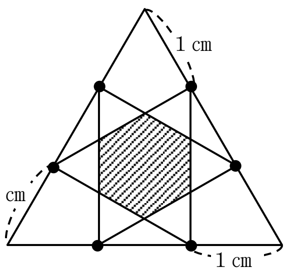
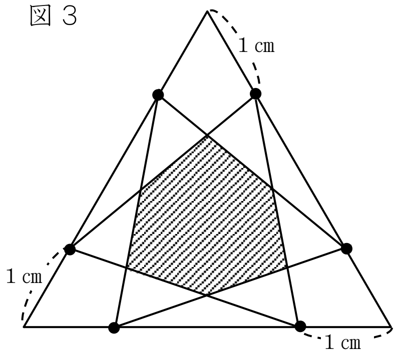


図３



（１）以下の正三角形について，内側の六角形の面積がもとの正三角形の面積の何倍であるかを求めなさい。

①　１辺の長さが４cm

②　１辺の長さが５cm

③　１辺の長さが６cm

（２）内側の正三角形１個の面積が，もとの正三角形の面積の$\frac{127}{147}$倍になりました。もとの正三角形の１辺の長さは何cmですか。

（３）内側の六角形の面積が，もとの正三角形の面積の$\frac{8281}{10692}$倍になりました。もとの正三角形の１辺の長さは何cmですか。

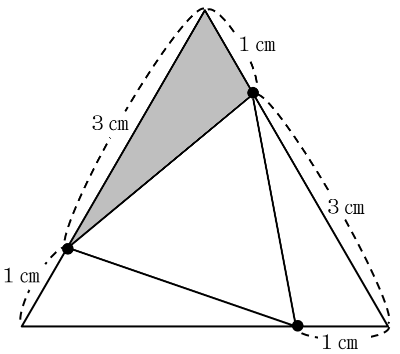
最難関問題

六芒星　（１）①$\frac{49}{160}$倍　②$\frac{338}{845}$倍　③$\frac{49}{108}$倍　（２）２１㎝　（３）１８㎝

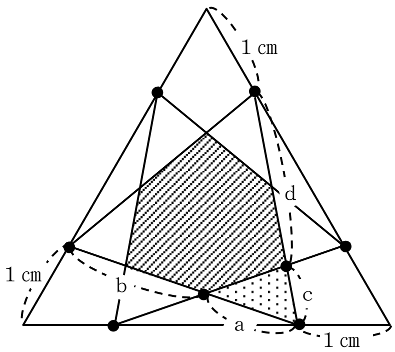
（１）

①　図①の影をつけた部分の面積は，もとの１辺の長さが４㎝の正三角形の，$\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$（倍）なので，内側の正三角形の面積は，$1-\frac{3}{16}\times3=\frac{7}{16}$（倍）です。内側の正三角形から，図②のあみ目の三角形を３個除くと内側の正六角形になるので，ａ：ｂ，ｃ：ｄの長さの比を求めます。

図①

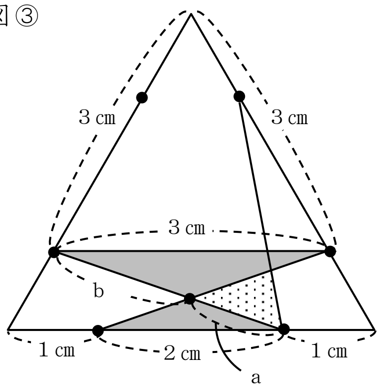


図②

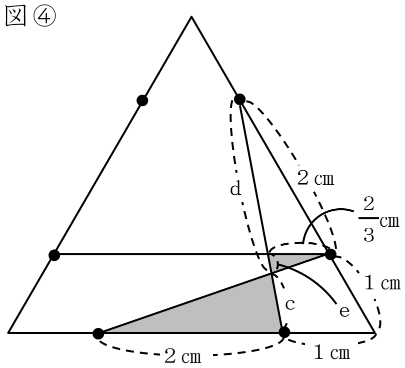


図③の影をつけた三角形は２：３の相似なので，ａ：ｂ＝２：３です。また，図④の影をつけた三角形は$２：\frac{2}{3}$＝３：１で，ｃの長さを③，ｅの長さを①とすると，ｄの長さは④×２＋①＝⑨なので，ｃ：ｄ＝③：⑨＝１：３です。

図③



図④



よって，図②のあみ目の三角形の面積は，内側の正三角形の面積の，$\dfrac{2}{2+3}\times\dfrac{1}{1+3}=\dfrac{1}{10}$（倍）です。以上より，内側の六角形の面積は，もとの正三角形の面積の，

$\dfrac{7}{16}\times\left(1-\dfrac{1}{10}\times 3\right)=\dfrac{7\times 7}{16\times 10}=\dfrac{49}{160}$（倍）です。

② 内側の正三角形の面積は，もとの１辺の長さが５㎝の正三角形の面積の，$1-\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{5}\times 3=\dfrac{13}{25}$（倍）です。また，①と同様に考えて，ａ：ｂ＝（５－２）:（５－１）＝３：４です。

ｃ：ｅ＝（５－２）:$\dfrac{3}{4}$＝４：１で，ｃの長さを④，ｅの長さを①とすると，

ｄの長さは⑤×３＋①＝⑯なので，ｃ：ｄ＝④：⑯＝１：４です。

よって，あみ目の三角形の面積は，内側の正三角形の面積の，$\dfrac{3}{3+4}\times\dfrac{1}{1+4}=\dfrac{3}{35}$（倍）です。以上より，内側の六角形の面積は，もとの正三角形の面積の，

$\dfrac{13}{25}\times\left(1-\dfrac{3}{35}\times 3\right)=\dfrac{13\times 26}{25\times 35}=\dfrac{338}{845}$（倍）です。

③ 内側の正三角形の面積は，もとの１辺の長さが６㎝の正三角形の面積の，

$1-\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{6}\times 3=\dfrac{21}{36}=\dfrac{7}{12}$（倍）です。また，①と同様に考えて，ａ：ｂ＝（６－２）:（６－１）＝４：５です。ｃ：ｅ＝（６－２）:$\dfrac{4}{5}$＝５：１で，ｃの長さを⑤，ｅの長さを①とすると，

ｄの長さは⑥×４＋①＝㉕なので，ｃ：ｄ＝⑤：㉕＝１：５です。

よって，あみ目の三角形の面積は，内側の正三角形の面積の，$\dfrac{4}{4+5}\times\dfrac{1}{1+5}=\dfrac{2}{27}$（倍）です。以上より，内側の六角形の面積は，もとの正三角形の面積の，

$\dfrac{7}{12}\times\left(1-\dfrac{2}{27}\times 3\right)=\dfrac{7\times 7}{12\times 9}=\dfrac{49}{108}$（倍）です。

最難関問題

（２）（１）より，もとの正三角形の１辺の長さを△cmとすると，内側の正三角形の面積は，正三角形の面積の，$1-\frac{\triangle-1}{\triangle}\times\frac{1}{\triangle}\times 3$（倍）なので，

$1-\frac{\triangle-1}{\triangle}\times\frac{1}{\triangle}\times 3=\frac{127}{147}$，

$\frac{\triangle-1}{\triangle}\times\frac{1}{\triangle}\times 3=1-\frac{127}{147}=\frac{20}{147}$，

$\frac{\triangle-1}{\triangle}\times\frac{1}{\triangle}=\frac{20}{147}\div 3=\frac{20}{441}$となるので，

４４１＝２１×２１より，△＝２１です。

（３）もとの正三角形の１辺の長さと，内側の正六角形の面積を並べると，次のようになります。

３cm…$\frac{2}{9}$倍，４cm…$\frac{49}{160}$倍，５cm…$\frac{338}{845}$倍，６cm…$\frac{49}{108}$倍

このとき，分子はもとの正三角形の１辺の長さがcmの単位で奇数のとき，

２＝１×１×２，３３８＝１３×１３×２より，平方数の２倍になっています。

また，分子はもとの正三角形の１辺の長さがcmの単位で偶数のとき，

４９＝７×７より，平方数になっています。８２８１は，９０×９０＝８１００で，１の位が１であることから，９１×９１を計算すると８２８１となることから，平方数です。ここで，もとの正三角形の１辺の長さが４cmのときと６cmのときの式を見返すと，

４cm…$\frac{7}{16}\times\left(1-\frac{1}{10}\times 3\right)=\frac{7\times 7}{16\times 10}=\frac{49}{160}$，

６cm…$\frac{7}{12}\times\left(1-\frac{2}{27}\times 3\right)=\frac{7\times 7}{12\times 9}=\frac{49}{108}$，となっています。このことから，（３）の場合も，

$\frac{91}{\bigcirc}\times\frac{91}{\square}=\frac{8281}{10692}$となっていることが考えられます。ここで内側の正三角形の面積の$\frac{91}{\bigcirc}$倍に注目をすると，（２）よりもとの正三角形の１辺の長さを△cmとするとき，

$1-\frac{\triangle-1}{\triangle}\times\frac{1}{\triangle}\times 3=\frac{91}{\bigcirc}$が成り立ちます。式の左側を通分すると

$1-\frac{\triangle-1}{\triangle}\times\frac{1}{\triangle}\times 3=\frac{\triangle\times\triangle}{\triangle\times\triangle}-\frac{(\triangle-1)\times 3}{\triangle\times\triangle}=\frac{91}{\bigcirc}$となります。

ここで，△が３の倍数ではない場合，

$\frac{\triangle-1}{\triangle}\times\frac{1}{\triangle}\times3$ に約分は生じないので，$1-\frac{\triangle-1}{\triangle}\times\frac{1}{\triangle}\times3$ にも約分は生じません。よって，式の両側の分子のみに注目をして，

△×△－（△－１）×３＝９１が成り立ちます。

△×△－△×３＋３＝９１，

△×△－△×３＝８８，

△×（△－３）＝８８より，

△は整数なので,差が３で積が８８となる整数をさがすと,１１×８＝８８があてはまります。ただし，１１は奇数なので，８２８１が平方数であることと矛盾します。

△が３の倍数の場合，$\frac{\triangle-1}{\triangle}\times\frac{1}{\triangle}\times3$ は３で１回だけ約分されるので，

$\frac{\triangle\times\triangle}{3}-\frac{(\triangle-1)\times3}{3}$ ＝９１が成り立ちます。

△×△－（△－１）×３＝２７３，

△×△－△×３＋３＝２７３，

△×△－△×３＝２７０，

△×（△－３）＝２７０より，

は整数なので，差が３で積が２７０となる整数をさがすと，１８×１５＝２７０があてはまります。

よって，もとの正三角形の１辺の長さは１８㎝です。