受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

# 最難関問題

黄金分割とフィボナッチ数列・面積編

（１），（２）は「黄金分割とフィボナッチ数列・長さ編」と同じ問題です。

図１の長方形ＡＢＣＤにおいて，対角線ＡＣと直線ＤＥは直交し，ＢＥ＝□cm，ＥＣ＝△cmです。また，□：△＝（□＋△）：□が成り立っています。このとき，点Ｅは辺ＢＣを「黄金分割」する，といいます。

（１）辺ＡＢの長さを，（□×ａ＋△×ｂ）cmの形で表しなさい。ａ，ｂには数が入ります。

次に，図２のようにＡＣと直交する直線ＢＧが対角線となるような長方形ＦＢＣＧをつくります。

（２）辺ＦＢの長さを，（□×ａ＋△×ｂ）cmの形で表しなさい。ａ，ｂには数が入ります。

図１

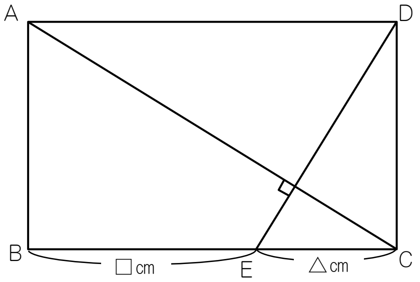
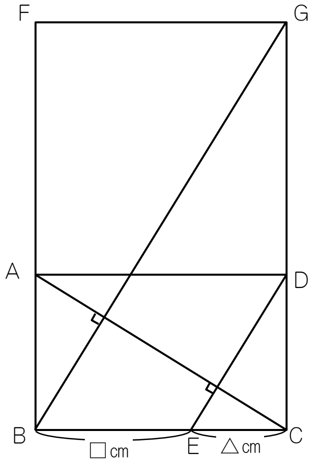



図２



# 最難関問題

以降も同様に，対角線に対して直交する
直線を引き，長方形を作っていきます。
ＡＣを１本目，ＢＧを２本目，…とすると，
６本目まで引くと図３のようになります。

（３）６本目の直線が対角線となる長方形の長いほうの辺の長さを，（□×ａ＋△×ｂ）㎝の形で表しなさい。ａ，ｂには数が入ります。

（４）次の文の，$x,y$にあてはまる整数の組を答えなさい。
「６本目の直線が対角線となる長方形の面積は,図４の正方形㋐$x$個と長方形㋑$y$個の合計に等しくなります」。

図３

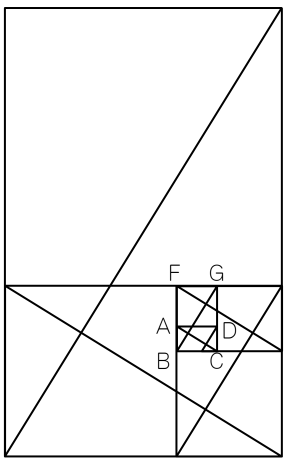
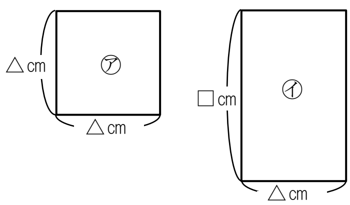



図４




（５）次の文の，$x,y$にあてはまる整数の組を答えなさい。
「ｎ本目の直線が対角線となる長方形の面積は，
図４の正方形㋐１２１３９３個と長方形㋑$x$個の合計に等しく，
ｎ＋１本目の直線が対角線となる長方形の面積は，
図４の正方形㋐３１７８１１個と長方形$y$個の合計に等しくなります。」

# 最難関問題

黄金分割とフィボナッチ数列・面積編

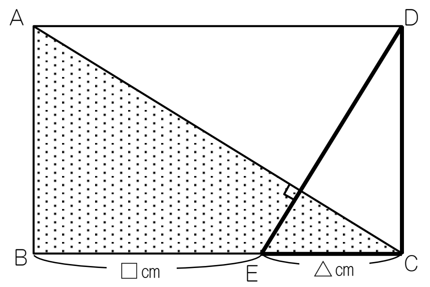
（１）（□×１＋△×０）㎝　（２）（□×２＋△×１）㎝　（３）（□×１３＋△×８）㎝

（４）$x$＝１４４，$y$＝２３３　（５）$x$＝１９６４１８，$y$＝５１４２２９

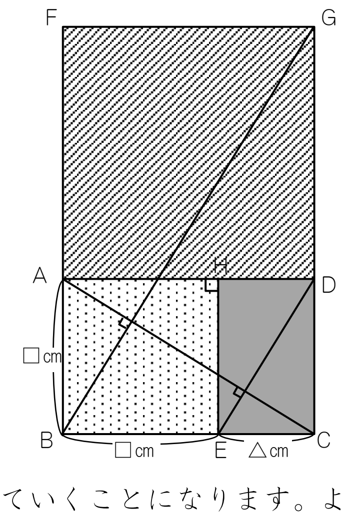
（１）□：△＝（□＋△）：□より，△×（□＋△）＝□×□です。また，三角形ＡＢＣと三角形ＥＣＤは相似形なので，ＡＢ：（□＋△）＝△：ＣＤより，△×（□＋△）＝ＡＢ×ＣＤ＝ＡＢ×ＡＢです。ＡＢ×ＡＢ＝□×□より，ＡＢ＝□です。

（２）図②のように長方形ＨＥＣＤを作ると，長方形ＡＥＣＤを正方形ＡＢＥＨの関係が，長方形ＡＢＣＤと四角形ＦＡＤＧの関係と同じであることがわかります。よって，四角形ＦＡＤＧは正方形なので，ＦＡ＝□＋△，ＦＢ＝□×２＋△です。

図①




図②




（３）３本目の直線以降も，正方形を付け加えていくことになります。よって，ｎ本目の直線を対角線とする長方形の長いほうの辺の長さは，次のようになります。

| ｎ本目 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 長さ（㎝） | □＋△ | □×２＋△ | □×３＋△×２ | □×５＋△×３ | □×８＋△×５ | □×13＋△×８ |

よって，（□×１３＋△×８）㎝です。

# 最難関問題

（４）６本目の直線が対角線となる長方形の長い方の辺の長さは（□×１３＋△×８）cm，短いほうの辺の長さは，（□×８＋△×５）cmです。

（□×１３＋△×８）×（□×８＋△×５）＝□×□×１０４＋□×△×１２９＋△×△×４０

ここで，（１）より△×（□＋△）＝△×□＋△×△＝□×□であることから，

□×□×１０４＋□×△×１２９＋△×△×４０

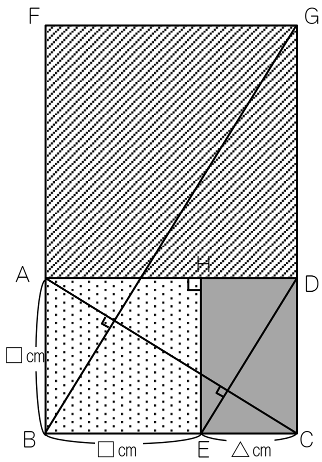
＝□×△×（１０４＋１２９）＋△×△×（１０４＋４０）

＝□×△×２３３＋△×△×１４４＝㋑×２３３＋㋐×１４４

となって，$x$＝１４４，$y$＝２３３です。

（５）（４）で求めた$x$＝１４４，$y$＝２３３はフィボナッチ数になっています。　図③

そこで，順番に仕組みを考えていきます。図③において最初の長方形をかげをつけたＥＣＤＨとし，続いて１本目の直線の対角線とする長方形ＡＢＣＤ，２本目の直線を対角線とする長方形ＦＢＣＧ，を考えていきます。




　最初の長方形ＥＣＤＨの面積は，□×△なので，㋐×０＋㋑×１です。

１本目の直線を対角線とする長方形の面積は，最初の長方形の面積の

$\frac{□+△}{△}$倍ですが，以降も同じ比率で長方形は作られるので，面積は毎回

$\frac{□+△}{△}$倍されます。

㋐×$\frac{□+△}{△}$＝（△×△）×$\frac{□+△}{△}$＝□×△＋△×△＝㋑＋㋐

㋑×$\frac{□+△}{△}$＝（□×△）×$\frac{□+△}{△}$＝□×□＋□×△＝（□×△＋△×△）＋□×△＝㋑＋㋐＋㋑

となるので，次のようになって，フィボナッチ数列が現れます。

| ｎ本目 | 最初 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ㋐ | 0 | 1 | 3 | 8 | ２１ | ５５ | 144 | 377 |
| ㋑ | 1 | 2 | 5 | １３ | ３４ | ８９ | 233 | 610 |

| ｎ本目 | … | ｎ | ｎ＋１ |
|---|---|---|---|
| ㋐ | … | 121393 | 317811 |
| ㋑ | … | $x$ | $y$ |

　よって，$x$＝３１７８１１－１２１３９３＝１９６４１８，

　　　　$y$＝１９６４１８＋３１７８１１＝５１４２２９です。