受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

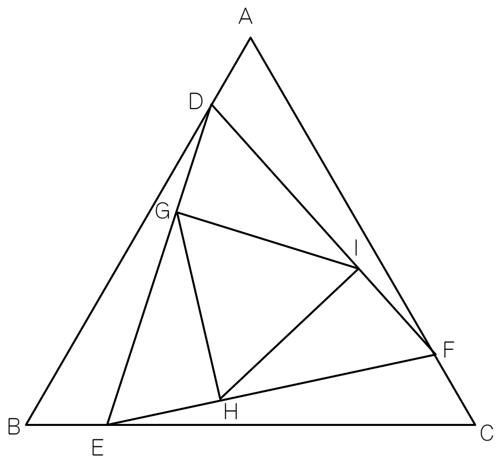
最難関問題

正三角形シリーズ４１

　下の図において三角形ＧＨＩは三角形ＤＥＦに内接し，三角形ＤＥＦは三角形ＡＢＣに内接していて，どれも正三角形です。また，三角形ＡＢＣとＧＨＩの面積の比は６７５：９１です。

　このとき，ＡＤの長さは辺ＡＢの長さの$\boxed{\text{ア}}$倍で，ＤＧの長さは辺ＤＥの長さの$\boxed{\text{イ}}$倍です。

（$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$）にあてはまる数の組はいくつもありますが，そのうちの４つを答えなさい。ただし，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ともに$\frac{1}{2}$以下とします。

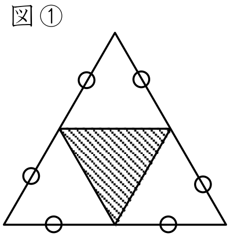


最難関問題

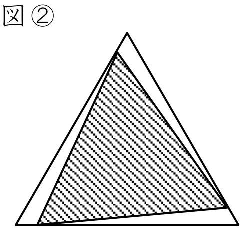
正三角形シリーズ４１　$(\frac{4}{9}, \frac{1}{5}), (\frac{1}{5}, \frac{4}{9}), (\frac{2}{5}, \frac{2}{9}), (\frac{2}{9}, \frac{2}{5})$ ※解答例

正三角形に正三角形が内接する場合，図①のような$\frac{1}{4}$倍が面積の最小で，図②のように傾けると１倍に近くなっていきます。よって，$\frac{1}{4} \leqq \boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}} < 1$で，$\boxed{\text{ア}} \times \boxed{\text{イ}} = \frac{91}{675}$となるような$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$の組を探します。素因数分解をすると９１＝７×１３であることから，$\frac{7}{a} \times \frac{13}{b} = \frac{91}{675}$となる場合，つまり計算の際に約分が生じない場合をまずは考えます。ａ×ｂ＝６７５であり，ａは７×４＝２８以下，
ｂは１３×４＝５２以下という条件を満たすのは，
（ａ，ｂ）＝（２７，２５），（２５，２７），（１５，４５）です。

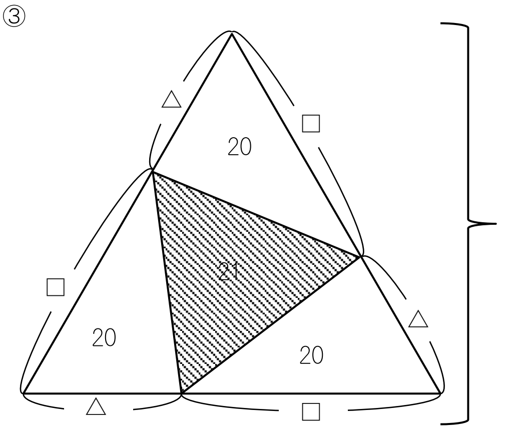
図①



図②



図③



$\frac{7}{27} \times \frac{13}{25}$の場合

内接する正三角形の面積が$\frac{7}{27} = \frac{21}{81}$倍になるときのそれぞれの部分の面積比は，図③のようになります。８１＝９×９より，□＋△＝９，□×△＝２０となる２つの数は４と５です。

同様に，内接する正三角形の面積が$\frac{13}{25}$倍になるときは，全体の面積を２５，内接する正三角形の面積を１３，周りの３つの三角形の面積は（２５－１３）÷３＝４となるので，２５＝５×５より，１＋４＝５，１×４＝４となって１と４が条件を満たします。

よって，$(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}) = (\frac{4}{9}, \frac{1}{5}), (\frac{1}{5}, \frac{4}{9})$ です。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

$\boxed{\frac{7}{25}\times\frac{13}{27}\text{の場合}}$

内接する正三角形の面積が$\frac{7}{25}$倍になるときは，全体の面積を２５，内接する正三角形の面積を７，周りの３つの三角形の面積は（２５－７）÷３＝６となるので，２５＝５×５より，２＋３＝５，２×３＝６となって２と３が条件を満たします。

内接する正三角形の面積が$\frac{13}{27}$倍になるときは，全体の面積を２７×３＝８１，内接する正三角形の面積を１３×３＝３９，周りの３つの三角形の面積は（８１－３９）÷３＝１４となるので，８１＝９×９より，２＋７＝９，２×７＝１４となって２と７が条件を満たします。

よって，（$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$）＝（$\frac{2}{5}$，$\frac{2}{9}$），（$\frac{2}{9}$，$\frac{2}{5}$）です。

$\boxed{\frac{7}{15}\times\frac{13}{45}\text{の場合}}$

内接する正三角形の面積が$\frac{7}{15}$倍になるときは，全体の面積を１５×１５＝２２５，内接する正三角形の面積を７×１５＝１０５，周りの３つの三角形の面積は（２２５－１０５）÷３＝４０となるので，２２５＝１５×１５より，□＋△＝１５，□×△＝４０となる□と△を探しますが，みつかりません。
（※□と△は，無理数になります。）

以上より，（$\frac{4}{9}$，$\frac{1}{5}$），（$\frac{1}{5}$，$\frac{4}{9}$），（$\frac{2}{5}$，$\frac{2}{9}$），（$\frac{2}{9}$，$\frac{2}{5}$）が解答例となります。無理数を含めれば答えは無限にあり，有理数の場合の別解があるかどうかは作問者は未検証です。