最難関問題

分数の和

次の問いに答えなさい。

（１）２つの分数$\frac{b}{a}$と$\frac{d}{c}$があり，ａ，ｂ，ｃ，ｄは異なる素数でａ＜ｃです。

$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{89}{6}$となるような$\frac{b}{a}$，$\frac{d}{c}$の組をすべて答えなさい。

（２）２つの既約分数$\frac{b}{a}$と$\frac{d}{c}$があり，ａ，ｂ，ｃ，ｄは異なる整数で$2 \leqq a < c$です。ａとｃが互いに素であるとき，$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{89}{30}$となるような$\frac{b}{a}$，$\frac{d}{c}$の組は何通りありますか。ただし，「互いに素」とは最大公約数が１であることをいいます。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

分数の和（１）$\dfrac{17}{2}$と$\dfrac{19}{3}$，$\dfrac{5}{2}$と$\dfrac{37}{3}$　（２）８通り

（１）$\dfrac{b}{a}$と$\dfrac{d}{c}$の和は，$\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}=\dfrac{b\times c+d\times a}{a\times c}$と表せます。$\dfrac{b\times c+d\times a}{a\times c}$が既約分数であるかどうかをまず考えます。約分可能な場合，ａとｃは素数ですから，分子はａかｃの倍数でなければなりません。ａの倍数を$\boxed{}$で囲うと，$\dfrac{b\times c+\boxed{d\times a}}{\boxed{a\times c}}$となります。ｂ×ｃはａの倍数ではなく，ｄ×ａはａの倍数ですから，その和はａの倍数ではありません。よって，ａで約分をすることはできません。ｃについても同様ですから，$\dfrac{b\times c+d\times a}{a\times c}$は既約分数です。

　このことから，ａ×ｃ＝６ときまります。ａとｃは素数でａ＜ｃですから，ａ＝２，ｃ＝３です。よって，$\dfrac{b\times c+d\times a}{a\times c}=\dfrac{b\times 3+d\times 2}{6}$となります。ｂ×３＋ｄ×２＝８９より，ｂは８９÷３＝２９．…未満で２，３以外の素数ですから，２９，２３，１９，１７，１３，１１，７，５のいずれかです。

・ｂ＝２９のとき，ｄ＝（８９－２９×３）÷２＝１…不適切
・ｂ＝２３のとき，ｄ＝（８９－２３×３）÷２＝１０…不適切
・ｂ＝１９のとき，ｄ＝（８９－１９×３）÷２＝１６…不適切
・ｂ＝１７のとき，ｄ＝（８９－１７×３）÷２＝１９…$\dfrac{17}{2}+\dfrac{19}{3}=\dfrac{89}{6}$
・ｂ＝１３のとき，ｄ＝（８９－１３×３）÷２＝２５…不適切
・ｂ＝１１のとき，ｄ＝（８９－１１×３）÷２＝２８…不適切
・ｂ＝７のとき，ｄ＝（８９－７×３）÷２＝３４…不適切
・ｂ＝５のとき，ｄ＝（８９－５×３）÷２＝３７…$\dfrac{5}{2}+\dfrac{37}{3}=\dfrac{89}{6}$

以上より，$\dfrac{17}{2}$と$\dfrac{19}{3}$，$\dfrac{5}{2}$と$\dfrac{37}{3}$です。

最難関問題

（２）ａとｃが互いに素であるとき，$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{b\times c+d\times a}{a\times c}$は（１）同様に既約分数であることをまず確かめます。

$\frac{b\times c+d\times a}{a\times c}$が約分可能な場合，分子はａかｃの約数の倍数でなければなりません。そこで，分子がａの１以外の約数ｅの倍数となるかどうかを考えます。ｂもｃもｅの倍数ではありませんから，ｂ×ｃはｅの倍数ではありません。そこで，ｅの倍数を$\boxed{}$で囲うと，$\frac{b\times c+\boxed{d\times a}}{\boxed{a\times c}}$となります。ｅの倍数ではない数とｅの倍数の和はｅの倍数ではありませんから，分子をｅで割ることはできません。ｃの１以外の約数についても同様ですから，$\frac{b\times c+d\times a}{a\times c}$は既約分数です。

よって，ａ×ｃ＝３０となり，２≦ａ＜ｃですから，（ａ，ｃ）＝（２，１５），（３，１０），（５，６）のいずれかです。

・（ａ，ｃ）＝（２，１５）のとき

$\frac{b\times15+d\times2}{30}=\frac{89}{30}$より，ｂ×１５＋ｄ×２＝８９ですから，調べ上げると以下のようになります。

b	5	3	1
d	7	22	37

よって，$\frac{5}{2}+\frac{7}{15}$，$\frac{3}{2}+\frac{22}{15}$，$\frac{1}{2}+\frac{37}{15}$の３通りです。

・（ａ，ｃ）＝（３，１０）のとき

$\frac{b\times10+d\times3}{30}=\frac{89}{30}$より，ｂ×１０＋ｄ×３＝８９ですから，調べ上げると以下のようになります。

b	8	5	2
d	3	13	23

ａ＝３であるためにｄ＝３は条件に反しますから，$\frac{5}{3}+\frac{13}{10}$，$\frac{2}{3}+\frac{23}{10}$の２通りです。

最難関問題

・（ａ，ｃ）＝（５，６）のとき

$\dfrac{b\times6+d\times5}{30}=\dfrac{89}{30}$より，ｂ×６＋ｄ×５＝８９ですから，調べ上げると以下のようになります。

b	14	9	4
d	1	7	13

よって，$\dfrac{14}{5}+\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{9}{5}+\dfrac{7}{6}$，$\dfrac{4}{5}+\dfrac{13}{6}$の３通りです。

以上より，３＋２＋３＝８（通り）です。