

最難関問題

有限小数の一番下の位

$\frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{3}{10} = 0.3$ のように、分子を分母で割ると小数第何位かで割り切れる分数について、割り

切れたときの一番下の位の数を $[\]$ で表します。たとえば、 $[\frac{1}{4}] = 5$, $[\frac{3}{10}] = 3$ です。

(1) $[\frac{2023}{8}]$, $[\frac{2023}{1024}]$ をそれぞれ計算しなさい。

(2) $[\frac{2023}{625}]$, $[\frac{2023}{875}]$ をそれぞれ計算しなさい。

(3) $[\frac{2023}{A}] = 8$ となるような、2023以下の整数Aを全て求めなさい。



最難関問題

有限小数の一番下の位

(1) $[\frac{2023}{8}] = 5, [\frac{2023}{1024}] = 5$

(2) $[\frac{2023}{125}] = 4, [\frac{2023}{875}] = 2$

(3) 35, 85, 350, 625, 850

(1) $\frac{2023}{8} = 252\frac{7}{8}$ で、 $\frac{7}{8} = 0.875$ なので、 $[\frac{2023}{8}] = 5$ です。 $\frac{2023}{1024}$ の場合は、次のように考えます。

$$\frac{2023}{1024} = 2023 \times \frac{1}{1024} = 2023 \times \frac{1}{\underbrace{2 \times \dots \times 2}_{10 \text{ 個}}} = 2023 \times \frac{\overbrace{5 \times \dots \times 5}^{10 \text{ 個}}}{\underbrace{10 \times \dots \times 10}_{10 \text{ 個}}}$$

一番下の位の数値は、 $2023 \times 5 \times \dots \times 5$ の一の位の数です。5は何個かけあわせても一の位が5であり、それに3をかけても一の位は5なので、 $[\frac{2023}{1024}] = 5$ です。

(2) $\frac{2023}{125} = 2023 \times \frac{1}{125} = 2023 \times \frac{1}{5 \times 5 \times 5} = 2023 \times \frac{2 \times 2 \times 2}{10 \times 10 \times 10}$ となるので、

一番下の位の数値は、 $2023 \times 2 \times 2 \times 2$ の一の位の数なので、4です。

$\frac{2023}{875}$ は、既約分数ではない点に注意をします。 $\frac{2023}{875} = \frac{289}{125}$ より、

$$\frac{289}{125} = 289 \times \frac{1}{125} = 289 \times \frac{1}{5 \times 5 \times 5} = 289 \times \frac{2 \times 2 \times 2}{10 \times 10 \times 10}$$

一番下の位の数値は、 $289 \times 2 \times 2 \times 2$ の一の位の数なので、2です。

最難関問題

(3) $2023 = 7 \times 17 \times 17$ より, $\frac{2023}{A}$ の分子を分母で割ると小数第何位かで割り切れる場合,

A の素因数は, 1 個以下の 7, 2 個以下の 17 と, いくつかの 2 と 5 です。たとえば,

$A = 2 \times 2 \times 5 \times 7$ のとき, $\frac{2023}{2 \times 2 \times 5 \times 7} = 289 \times \frac{1}{2 \times 2 \times 5} = 289 \times \frac{5}{10 \times 10}$ となるので, 一番下の位の数は 289×5 の一の位の 5 です。

このように, 一番下の位の数は, $2023 \times \frac{\square \times \dots \times \square}{10 \times \dots \times 10}$ における $2023 \times \square \times \dots \times \square$ や,

$289 \times \frac{\square \times \dots \times \square}{10 \times \dots \times 10}$ における $289 \times \square \times \dots \times \square$ の一の位にあたります。□には 2 か 5 が入るので,

一の位が偶数になるのは, □に 2 が入る場合です。そのためには, A を素因数分解したときに 2 よりも

5 が多く現れることが必要です。例えば, $2023 \times \frac{1}{2 \times 5 \times 5 \times 5} = 2023 \times \frac{2 \times 2}{10 \times 10 \times 10}$ の

ようになります。

また, (2023 の約数) $\times 2 \times \dots \times 2$ の一の位が 8 になるということから, 2023 の約数の一の位に注目すると,

(7 か 17) $\times 2 \times \dots \times 2$ では 2 が 1 個の場合から順に一の位が 4, 8, 6, 2, …のくり返し,

(119 か 289) $\times 2 \times \dots \times 2$ では 2 が 1 個の場合から順に一の位が 8, 6, 2, 4, …のくり返し,

(2023) $\times 2 \times \dots \times 2$ では 2 が 1 個の場合から順に一の位が 6, 2, 4, 8, …のくり返し,

となります。1 も 2023 の約数ですが, $A = 2023$ の場合しかあてはまらないので, 除外します。

(7 か 17) $\times 2 \times \dots \times 2$ の場合

$7 \times 2 \times 2$ や, $17 \times 2 \times 2$ の一の位が 8 になります。ここで, $17 \times 2 \times 2$ となる最小の A を考えます。 $2023 \div 17 = 119$ なので,

$$17 \times \frac{2 \times 2}{10 \times 10} = 17 \times \frac{1}{5 \times 5} = 2023 \times \frac{1}{119 \times 5 \times 5} \text{ のときに,}$$

$A = 119 \times 5 \times 5 = 2975$ となるので, 2023 より大きくなります。 $7 \times 2 \times 2$ となる最小の A の場合は,

$$7 \times \frac{2 \times 2}{10 \times 10} = 7 \times \frac{1}{5 \times 5} = 2023 \times \frac{1}{289 \times 5 \times 5} \text{ となるのでなおのこと大きくなってしまいま}$$

す。よって, 条件を満たす A はありません。

最難関問題

(119か289) × 2 × … × 2の場合

119 × 2 や、289 × 2 の一の位が8になります。まず、119 × 2 となる最小のAを考えます。
2023 ÷ 119 = 17 なので、

$$119 \times \frac{2}{10} = 119 \times \frac{1}{5} = 2023 \times \frac{1}{17 \times 5} \text{のときに, } A = 17 \times 5 = 85 \text{です。また, 2番目に}$$

小さいAを考えると、

$$119 \times \frac{2}{10 \times 10} = 119 \times \frac{1}{2 \times 5 \times 5} = 2023 \times \frac{1}{17 \times 2 \times 5 \times 5} \text{のときに,}$$

A = 17 × 2 × 5 × 5 = 850 です。その次のAは8500 になってしまうので、2023 以下にはなりません。

続いて、289 × 2 となる最小のAを考えます。2023 ÷ 289 = 7 なので、

$$289 \times \frac{2}{10} = 289 \times \frac{1}{5} = 2023 \times \frac{1}{7 \times 5} \text{のときに, } A = 7 \times 5 = 35 \text{です。また, 2番目以降の}$$

Aは350, 3500, …となるので、35と350が条件を満たします。

(2023) × 2 × … × 2の場合

2023 × 2 × 2 × 2 × 2 の一の位が8になります。最小のAは、

$$2023 \times \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{10 \times 10 \times 10 \times 10} = 2023 \times \frac{1}{5 \times 5 \times 5 \times 5} \text{のときの,}$$

A = 5 × 5 × 5 × 5 = 625 です。2番目以降のAは6250, …となるので、625のみが条件を満たします。

以上より、35, 85, 350, 625, 850が答えとなります。