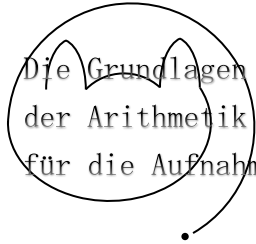


## 最難関問題

### 平方数の差

1, 4, 9, 16, 25, …のような, 同じ整数2個の積にあたる数を, 平方数といいます。次の問いに答えなさい。

- (1) 差が45であるような2つの平方数の組みあわせをすべてこたえなさい。
- (2) 差が240であるような2つの平方数の組みあわせをすべてこたえなさい。



## 最難関問題

### 平方数の差

(1) (4, 49), (36, 81), (484, 529)

(2) (16, 256), (49, 289), (121, 361), (289, 529),  
(784, 1024), (3481, 3721)

(1) 平方数の差の数列は、連続する奇数の列であることを利用します。

平方数	1	4	9	16	25	36	49	64	...
差	3	5	7	9	11	13	15	...	

例えば平方数9と49の差は、 $7 + 9 + 11 + 13 = 40$ となるように、平方数の差は連続する奇数の和となります。

奇数の和が45という奇数になるのは、奇数を奇数個たした場合です。45を2つの奇数をかける式で表すと、 $45 \times 1$ 、 $15 \times 3$ 、 $9 \times 5$ となります。

$9 \times 5 = 5 + 7 + 9 + 11 + 13$ で、5は $(5 + 1) \div 2 = 3$  (番目)の奇数なので、 $3 - 1 = 2$  (番目)の平方数である $2 \times 2 = 4$ と、 $2 + 5 = 7$  (番目)の平方数である $7 \times 7 = 49$ の差と一致します。

$15 \times 3 = 13 + 15 + 17$ で、13は $(13 + 1) \div 2 = 7$  (番目)の奇数なので、 $7 - 1 = 6$  (番目)の平方数である $6 \times 6 = 36$ と、 $6 + 3 = 9$  (番目)の平方数である $9 \times 9 = 81$ の差と一致します。

$45 \times 1$ はそのまま45で、45は $(45 + 1) \div 2 = 23$  (番目)の奇数なので、 $23 - 1 = 22$  (番目)の平方数である $22 \times 22 = 484$ と、 $23 \times 23 = 529$ の差と一致します。

以上より、(4, 49), (36, 81), (484, 529)が答えとなります。

## 最難関問題

(2) 奇数の和が240という偶数になるのは、奇数を偶数個たした場合です。たとえば、 $3 + 5 + 7 + 9$ は、4つの奇数の平均が偶数6なので、 $3 + 5 + 7 + 9 = 6 \times 4 = 24$ となります。

240を2つの偶数をかける式で表すと、 $120 \times 2$ 、 $60 \times 4$ 、 $40 \times 6$ 、 $30 \times 8$ 、 $24 \times 10$ 、 $20 \times 12$ となります。

$120 \times 2 = 119 + 121$ で、119は $(119 + 1) \div 2 = 60$  (番目)の奇数なので、 $60 - 1 = 59$  (番目)の平方数である $59 \times 59 = 3481$ と、 $59 + 2 = 61$  (番目)の平方数である $61 \times 61 = 3721$ の差と一致します。

$60 \times 4 = 57 + 59 + 61 + 63$ で、57は $(57 + 1) \div 2 = 29$  (番目)の奇数なので、 $29 - 1 = 28$  (番目)の平方数である $28 \times 28 = 784$ と、 $28 + 4 = 32$  (番目)の平方数である $32 \times 32 = 1024$ の差と一致します。

$40 \times 6 = 35 + 37 + 39 + 41 + 43 + 45$ で、35は $(35 + 1) \div 2 = 18$  (番目)の奇数なので、 $18 - 1 = 17$  (番目)の平方数である $17 \times 17 = 289$ と、 $17 + 6 = 23$  (番目)の平方数である $23 \times 23 = 529$ の差と一致します。

$30 \times 8 = 23 + 25 + 27 + 29 + 31 + 33 + 35 + 37$ で、23は $(23 + 1) \div 2 = 12$  (番目)の奇数なので、 $12 - 1 = 11$  (番目)の平方数である $11 \times 11 = 121$ と、 $11 + 8 = 19$  (番目)の平方数である $19 \times 19 = 361$ の差と一致します。

$24 \times 10 = 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31 + 33$ で、15は $(15 + 1) \div 2 = 8$  (番目)の奇数なので、 $8 - 1 = 7$  (番目)の平方数である $7 \times 7 = 49$ と、 $7 + 10 = 17$  (番目)の平方数である $17 \times 17 = 289$ の差と一致します。

$20 \times 12 = 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31$ で、9は $(9 + 1) \div 2 = 5$  (番目)の奇数なので、 $5 - 1 = 4$  (番目)の平方数である $4 \times 4 = 16$ と、 $4 + 12 = 16$  (番目)の平方数である $16 \times 16 = 256$ の差と一致します。

以上より、

(16, 256), (49, 289), (121, 361), (289, 529), (784, 1024), (3481, 3721) が答えとなります。