

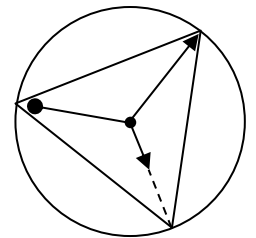
最難関問題

時計算と正多角形

図において、短い針は時針、先が三角の長い針は分針、先が丸い長い針は秒針を表しています。以下の問いに答えなさい。

(1) 時計の時針、分針、秒針の3つの針が進む速さの比を求めなさい。

(2) 時計の3つの針が、右図のように正三角形の異なる3つの頂点を同時に指すことはありますか。ある場合、12時ちょうどを過ぎてから、1回目にそのようになるのは何時何分何秒であるか答えなさい。ない場合は、ないと答えなさい。

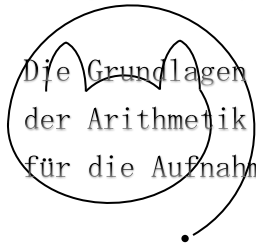


(3) 時計の3つの針が、正方形の異なる3つの頂点を同時に指すことはありますか。

ある場合、12時ちょうどを過ぎてから、1回目にそのようになるのは何時何分何秒であるか答えなさい。ない場合は、ないと答えなさい。

(4) 時計の3つの針が、正五角形の異なる3つの頂点を同時に指すことはありますか。ある場合、12時ちょうどを過ぎてから、1回目にそのようになるのは何時何分何秒であるか答えなさい。ない場合は、ないと答えなさい。

(5) (2) ~ (4) のように正三角形から初めて順に正多角形を考えていった場合、時計の3つの針が正多角形の異なる3つの頂点を同時に指すことがある、6番目の図形は正何角形ですか。また、12時ちょうどを過ぎてから、1回目にそのようになるのは何時何分何秒ですか。



最難関問題

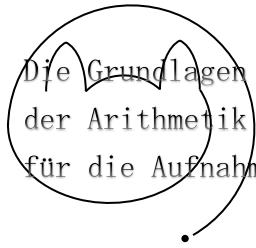
時計算と正多角形 (1) 1 : 12 : 720 (2) ない (3) ない (4) 2時24分0秒
 (5) 正13角形, 12時55分23 $\frac{1}{13}$ 秒

(1) 時針は1分間で0.5度, 分針は1分間で6度, 秒針は1分間で360度進むので,
 $0.5 : 6 : 360 = 1 : 12 : 720$ です。

(2) 時針に対して分針と秒針が進む速さの比は, $(12 - 1) : (720 - 1) = 11 : 719$ です。時針が正多角形の頂点の1つを指している場合, 分針はそれより $11 \times \square$ 進んだ頂点を指し, 秒針は $719 \times \square$ 進んだ頂点を指しています。 $11 \div 3 = 3$ 余り 2 , $719 \div 3 = 239$ 余り 2 となって余りが等しいため, 分針と秒針は常に同じ頂点を指してしまいます。よって, 異なる3つの頂点を同時に指すことはありません。

(3) $11 \div 4 = 2$ 余り 3 , $719 \div 4 = 179$ 余り 3 となって余りが等しいため, 分針と秒針は常に同じ頂点を指してしまいます。よって, 異なる3つの頂点を同時に指すことはありません。

(4) $11 \div 5 = 2$ 余り 1 , $719 \div 5 = 143$ 余り 4 となって余りが異なるため, 分針と秒針は異なる頂点を指します。正五角形のとなりあう頂点は $360 \div 5 = 72$ (度) 離れていますから, 1回目の場合, 秒針は分針より $72 \times (720 - 12)$ 度, 分針は時針より $72 \times 11 = 792$ (度) 進んでいます。よって, 12時0分0秒の $792 \div (6 - 0.5) = 144$ (分後) ですから, 2時24分0秒となります。



最難関問題

(5) 同様に割り算をしていくと、余りは次のようになります。

| 正多角形 | 短針 (0) | 長針 (11) | 秒針 (719) |
|-------|--------|---------|----------|
| 正三角形 | 0 | 2 | 2 |
| 正方形 | 0 | 3 | 3 |
| 正五角形 | 0 | 1 | 4 |
| 正六角形 | 0 | 5 | 5 |
| 正七角形 | 0 | 4 | 5 |
| 正八角形 | 0 | 3 | 7 |
| 正九角形 | 0 | 2 | 8 |
| 正10角形 | 0 | 1 | 9 |
| 正11角形 | 0 | 0 | 4 |
| 正12角形 | 0 | 11 | 11 |
| 正13角形 | 0 | 11 | 4 |

上の表のうち、暗くした行の正多角形は、3つの針のうち2つが同じ頂点を指してしまうため、条件を満たしません。条件を満たす6番目の正多角形は、正13角形です。正13角形のとなりあう頂点は

$$360 \div 13 = \frac{360}{13} \text{ (度) 離れていますから、1回目の場合、長針は短針よりも } \frac{360}{13} \times 11 =$$

$$\frac{3960}{13} \text{ (度) 進んでいます。よって、12時0分0秒の } \frac{3960}{13} \div (6 - 0.5) = \frac{720}{13} \text{ (分後)}$$

ですから、12時55分23 $\frac{1}{13}$ 秒となります。