

立方体の表面積パズル・1

次の問いに答えなさい。

(1) 同じ大きさの小さな立方体を8個はりあわせて、図1の大きな立方体を作りました。

大きな立方体では、小さな立方体の面が前後左右上下どの方向からも4面見えるので、外から $4 \times 6 = 24$ (面) 見えます。ここから小さな立方体をいくつかはがして、外から見える面が24面のままであるようにします。ただし、はがすことによって立体がばらばらになってはいけません。例えば、図2では立体は1つにつながっていますが、図3では面と面がくっついていないので立体は2つに分かれてしまいます。小さな立方体のはがしかたは、何通りありますか。

なお、小さな立方体をはがす順序は考えません。また、はがした後の立体が回転などによってぴったり重なるとしても、はがす場所が異なれば別のはがし方とします。

図1

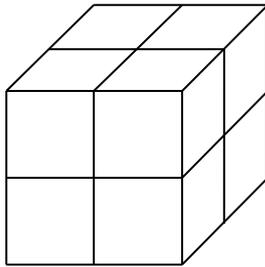


図2

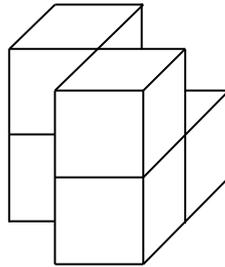
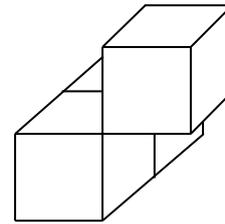


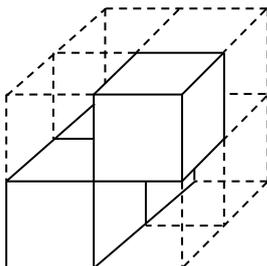
図3



(2) 今度は、図1の小さな立方体のいくつかを^{どうめい}透明な立方体^{こうかん}に交換します。よって、図3のように立体がばらばらになることはありません。図4では、透明な立方体の面は見えないので、外からは16面見えます。

このとき、外から見える面が24面のままであるような交換の仕方は何通りありますか。なお、交換する順序は考えません。また、交換した後の立体が回転などによってぴったり重なるとしても、交換する場所が異なれば別の交換の仕方とします。

図4

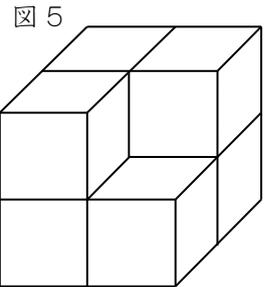


立方体の表面積パズル・1 (1) 24通り (2) 34通り

(1) はがす立方体の個数によって場合分けをします。

○1個はがす場合

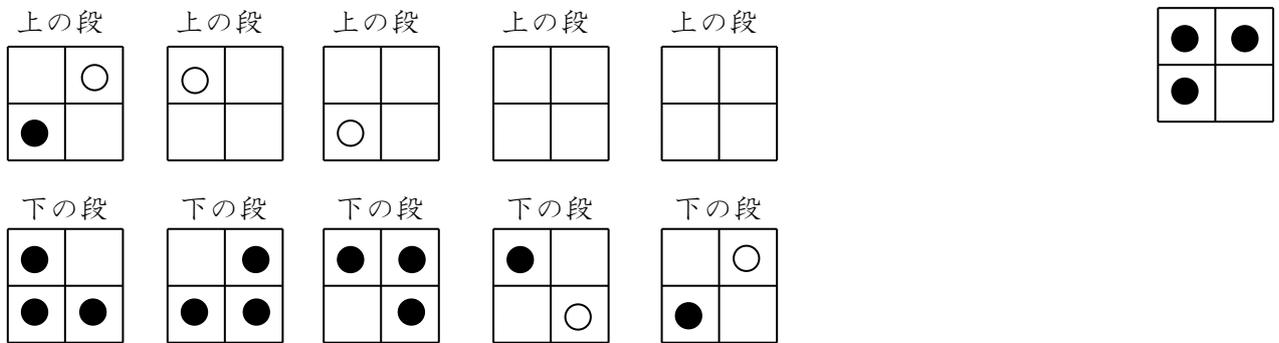
図5のように立方体を1個はがしても、外から見える面の個数は変わりません。8個ある立方体のどれを外しても構わないので、8通りです。



○2個はがす場合

図5のように1個はがした状態で、残りの1個をどこからはがすことができるのかを考えます。上の段と下の段をスライスした図において、○で最初にはがした立方体を表し、次にはがす立方体に●をつけることで、右図のようになって4通りのはがし方があります。

重複に気をつけながら他の場合も考えると、以下のようになります。



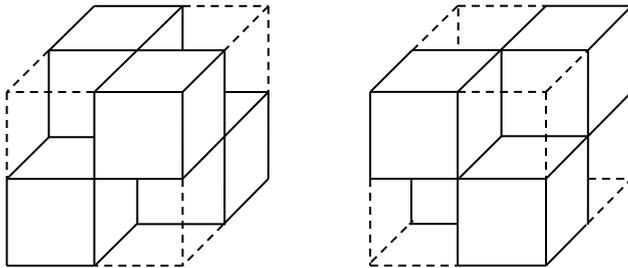
よって、 $(4 + 3 + 1) \times 2 = 16$ (通り) です。

○3個以上はがす場合

外から見える面の個数を変えないようにすると、どのようにしても立体がばらけてしまいます。

以上より、 $8 + 16 = 24$ (通り) です。

(2) 1個および2個の立方体を交換する場合は、(1)と同様に24通りです。3個以上交換する場合は、まず交換できる最大の個数を考えます。1つの方向から見たときに4つの面が見えるためには、立方体は少なくとも4個交換しないが残っていなければなりません。よって、交換できる最大の個数は $8 - 4 = 4$ (個)で、以下の2通りです。



3個交換する場合は、4個交換した場合の透明な立方体のうち1つをもとの立方体に戻すと考えて、 $2 \times 4 = 8$ (通り)です。

4個交換する方法が2通り、3個交換する方法が8通りですから、あわせて $2 + 8 = 10$ (通り)です。1個および2個交換する場合とあわせて、 $24 + 10 = 34$ (通り)です。