



最難関問題

部分分数分解・1

次の式を計算しなさい*。

$$\frac{4}{1 \times 2 \times 3} + \frac{5}{2 \times 3 \times 4} + \frac{6}{3 \times 4 \times 5} + \frac{7}{4 \times 5 \times 6} + \dots + \frac{22}{19 \times 20 \times 21} + \frac{23}{20 \times 21 \times 22}$$

※ $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{3}{2 \times 5} = \frac{2-1}{1 \times 2} + \frac{5-2}{2 \times 5} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{1}{1} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ という簡単な計算からもわかる通り、部分分数分解において分子が等しいということは全く必要な条件ではありません。

最難関問題

部分分数分解・1 $1 \frac{31}{154}$

解法1

$3 - 1 = 4 - 2 = \dots = 22 - 20 = 2$ であることから、分子を次のように分けます。

$$\frac{2+2}{1 \times 2 \times 3} + \frac{2+3}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{2+21}{20 \times 21 \times 22}$$

そのうえで、分子が2である分数と、分子が2, 3, ..., 21である分数のそれぞれについて計算をします。

$$\begin{aligned} & \frac{2}{1 \times 2 \times 3} + \frac{2}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{2}{20 \times 21 \times 22} = \frac{3-1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{4-2}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{22-20}{20 \times 21 \times 22} \\ & = \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{20 \times 21} - \frac{1}{21 \times 22} = \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{21 \times 22} \\ & = \frac{230}{462} = \frac{115}{231} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{1 \times 2 \times 3} + \frac{3}{2 \times 3 \times 4} + \frac{4}{3 \times 4 \times 5} + \frac{5}{4 \times 5 \times 6} + \dots + \frac{20}{19 \times 20 \times 21} + \frac{21}{20 \times 21 \times 22} \\ & = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{4 \times 6} + \dots + \frac{1}{19 \times 21} + \frac{1}{20 \times 22} \end{aligned}$$

この分数列は、

$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{19 \times 21}$ と $\frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{4 \times 6} + \dots + \frac{1}{20 \times 22}$ に分けることができます。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \dots + \frac{2}{19 \times 21} + \frac{2}{2 \times 4} + \frac{2}{4 \times 6} + \dots + \frac{2}{20 \times 22} \right) \\ & = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3-1}{1 \times 3} + \frac{5-3}{3 \times 5} + \dots + \frac{21-19}{19 \times 21} + \frac{4-2}{2 \times 4} + \frac{6-4}{4 \times 6} + \dots + \frac{22-20}{20 \times 22} \right) \\ & = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{20} - \frac{1}{22} \right) \\ & = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{21} + \frac{1}{2} - \frac{1}{22} \right) = \frac{325}{462} \end{aligned}$$

以上より、 $\frac{115}{231} + \frac{325}{462} = 1 \frac{31}{154}$ です。

最難関問題

解法 2

解法 1 では分子を

$$\frac{2+2}{1 \times 2 \times 3} + \frac{2+3}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{2+21}{20 \times 21 \times 22}$$
 と分けましたが、今度は分子を

$$\frac{1+3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1+4}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1+22}{20 \times 21 \times 22}$$
 と分けます。

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{20 \times 21 \times 22} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{1 \times 2 \times 3} + \frac{2}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{2}{20 \times 21 \times 22} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{21 \times 22} \right) = \frac{115}{462}$$
 です。

また、

$$\frac{3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{4}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{22}{20 \times 21 \times 22} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{20 \times 21} = \frac{1}{1} - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$$
 です。

$$\frac{115}{462} + \frac{20}{21} = 1 \frac{31}{154}$$
 です。

解法 2 のほうが幾分計算は楽ですが、解法 1 のほうが思いつきやすいかもしれません。