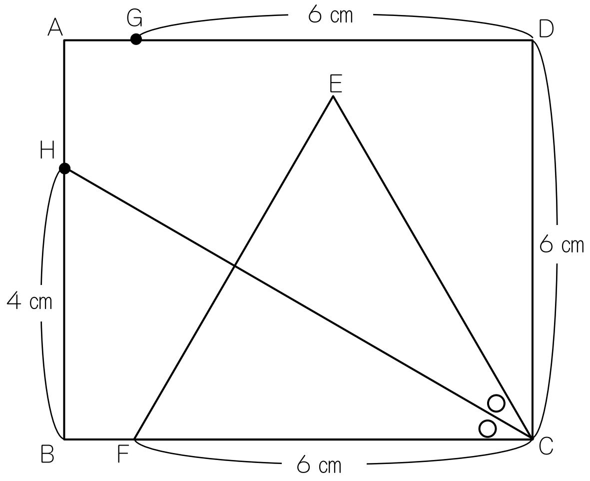
最難関問題

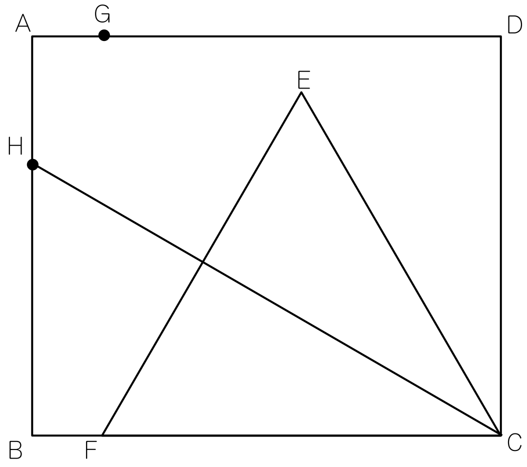
長方形・正三角形と近さの範囲

右の図において，四角形ＡＢＣＤは長方形，三角形ＣＥＦは正三角形です。また，○印のついた角の大きさは等しくなっています。次の問いに答えなさい。

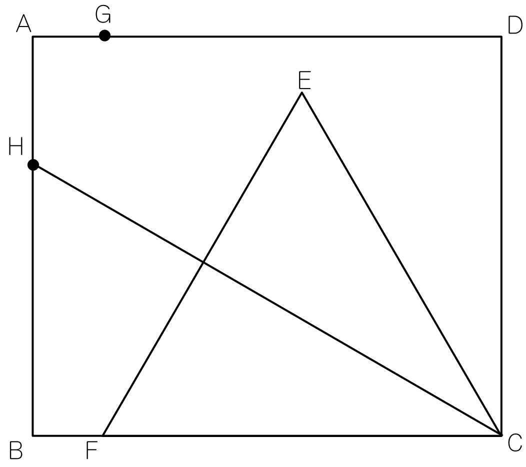


（１）長方形ＡＢＣＤの内部に点Ｐをとって，三角形ＡＤＰと三角形ＣＥＰを作ります。三角形ＡＤＰの面積が三角形ＣＥＰの面積より小さくなる範囲を直定規とコンパスを使って図し，斜線で塗りなさい。作図に用いた線は消さないこと。

【練習用】



【解答らん】



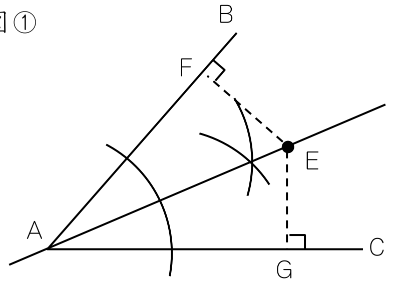
（２）（１）で求めた部分の面積は，長方形ＡＢＣＤの面積の何倍ですか。

最難関問題

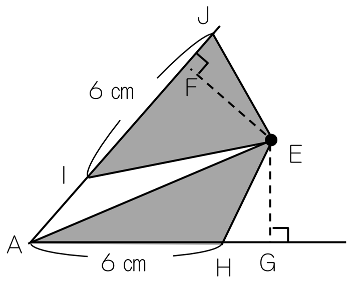
（１）解説参照　（２）$\dfrac{1}{3}$倍

（１）２本の直線から等しい距離にある点は，角の二等分線によって作図できます。図①のように角ＢＡＣの二等分線ＡＤを作図し，ＡＤ上に点Ｅをとると，垂線ＥＦとＥＧの長さは等しくなります。よって，直線ＡＢ，ＡＣ上に６㎝の線分をとって図②のように三角形ＩＪＥとＡＨＥを作ると，底辺と高さが等しいので面積も等しくなります。

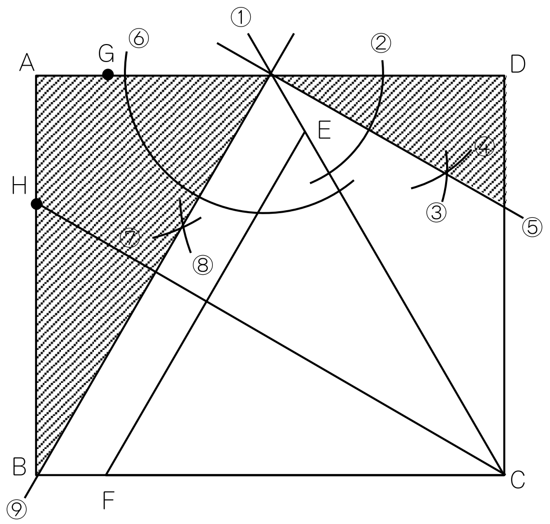
図①



図②



解答例は次の通りです。



①　辺ＣＥを延長する

②～⑤　直線ＣＥと辺ＡＤのなす角の二等分線を作図

⑥～⑨　直線ＣＥと辺ＡＤのなす角の二等分線をもう１本作図。２つの二等分線は垂直に交わるので，２本目は１本目の垂線として作図することも可能です。

なお，⑨の二等分線は，頂点Ｂを通過します。

最難関問題

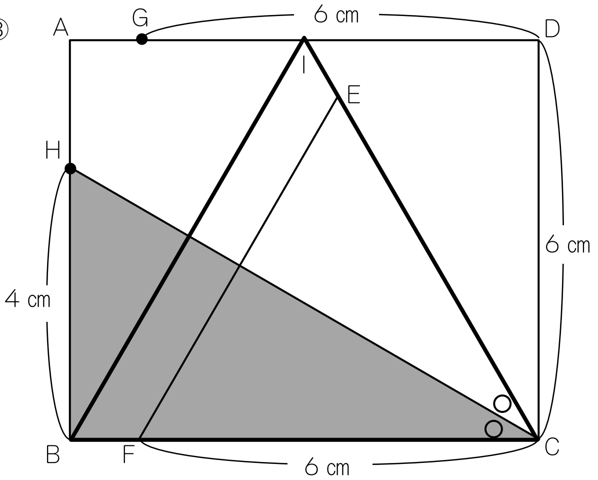
（２）（１）の二等分線⑨は頂点Ｂを通過しましたが，その理由も含めて考えていかなければなりません。

ＣＥの延長線とＡＤの交点をＩとすると，三角形ＢＣＩは高さが６㎝の正三角形です。図④のように考えると，正三角形ＢＣＩの面積は，１辺が１２㎝の正三角形の３分の１にあたります。また，図③でかげをつけた三角形ＢＣＨは，１辺の長さが８㎝の正三角形の半分の直角三角形です。

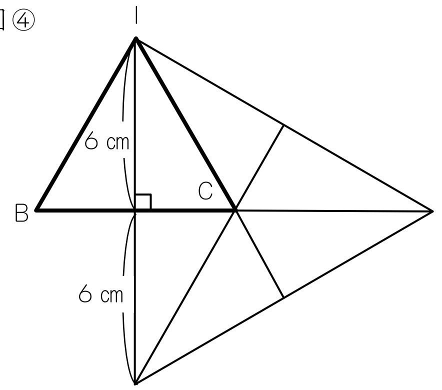
よって，（正三角形ＢＣＩの面積）：（直角三角形ＢＣＨの面積）

$=(12\times12\times\frac{1}{3}):(8\times8\times\frac{1}{2})=3:2$ です。また，辺ＢＣを底辺としたときの高さの比も $6:4=3:2$ なので，底辺の比は $(3\div3):(2\div2)=1:1$ となるので，（１）の二等分線⑨は頂点Ｂを通過します。

図③



図④



図⑤において〇印をつけた角の大きさは３０度です。点Ｉは辺ＡＤを二等分する点であり，ＤＪ＝２㎝，ＪＩ＝ＪＣ＝４㎝となることから，斜線部分の面積の合計は長方形ＡＢＣＤの面積の，

$\frac{6}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$（倍）です。

図⑤