受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

正方形・正八角形の敷きつめと正方形の面積・２

　辺の長さが等しい正方形と正八角形で平面を図１のように敷きつめ，これらの頂点を４個結んで，図２のような，敷きつめておいた正方形と各辺が平行となる正方形を作図します。必要であれば２枚目の紙を使って，以下の問いに答えなさい。

図１

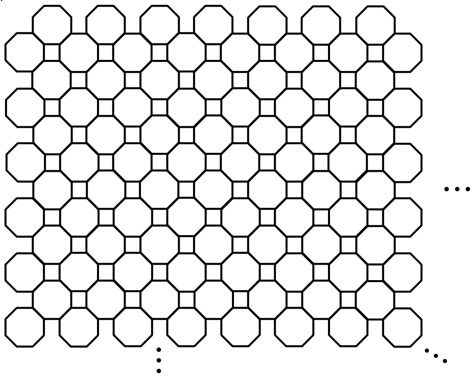
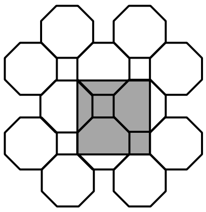


図２



（１）図２の正方形の面積は，正方形何個と正八角形何個の合計に等しいか，答えなさい。

（２）正方形を作図したところ，正方形ａ個と正八角形ｂ個の面積に等しくなりました。ａが以下の値をとるときのｂの値として考えられるものをすべて答えなさい。

①　ａ＝５

②　ａ＝８

③　ａ＝１３

（３）正方形を作図したところ，正方形ａ個と正八角形ｂ個の面積に等しくなりました。ｂが以下の値をとるときのａの値として考えられるものをすべて答えなさい。

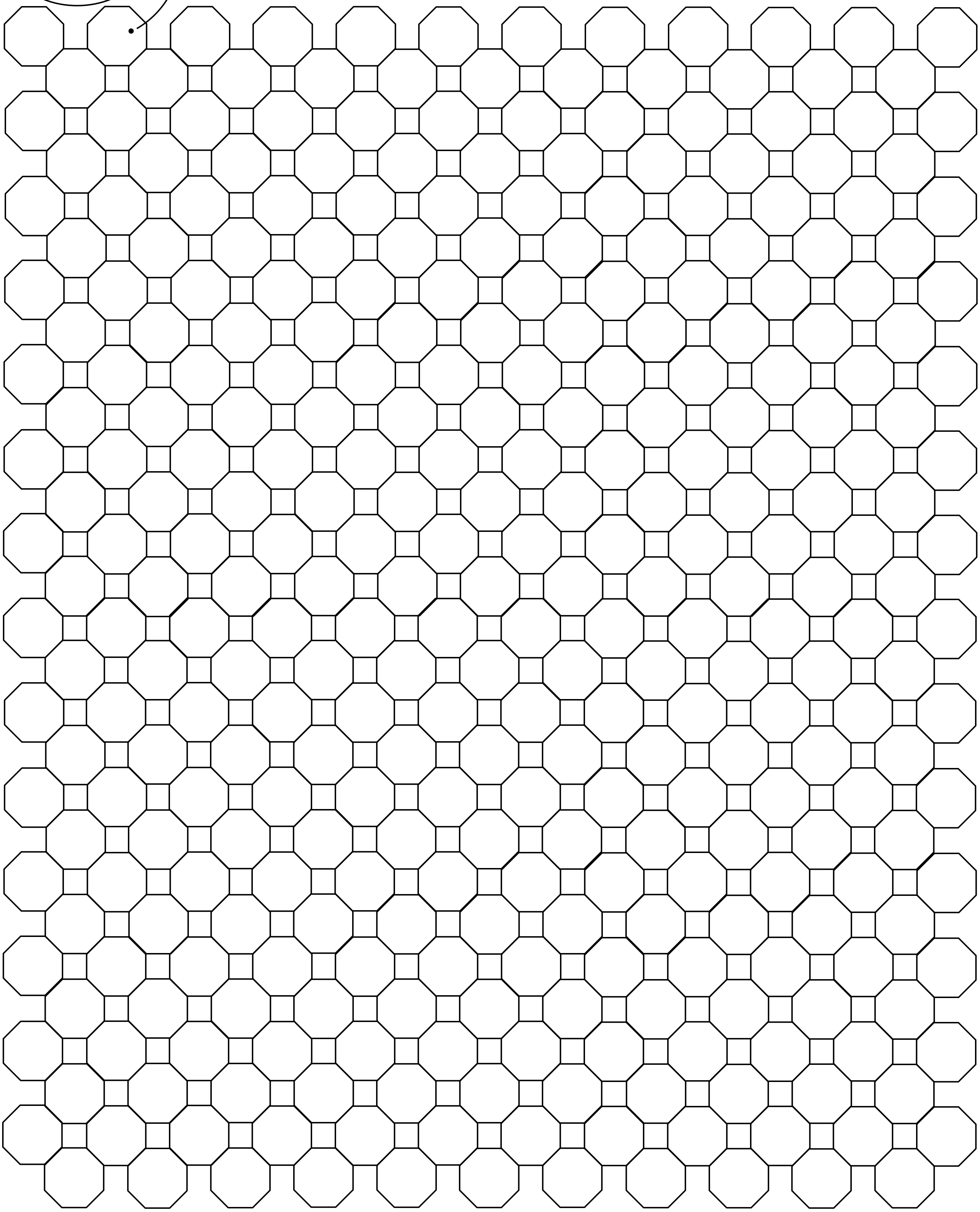
①　ｂは５０００以上の最小の整数

②　ｂは１００００以上の最小の整数

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題



受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

正方形・正八角形の敷きつめと正方形・２

（１）正方形２個と正八角形２個

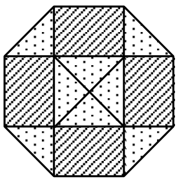
（２）①ｂ＝３，６　②ｂ＝８　③ｂ＝１０，１５

（３）①ａ＝５０００　②ａ＝９９４１

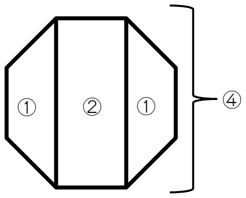
（１）図①のように，正八角形はあみ目の直角二等辺三角形８個と斜線の長方形４個に分割できます。よって，正八角形の面積を④とすると，対角線によって面積は図②のように分けることができます。

図２は図③のように正方形が２個と，正八角形が（①＋③）×２÷④＝２（個）の合計と等しい面積です。

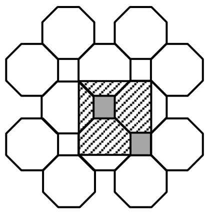
図①



図②



図③



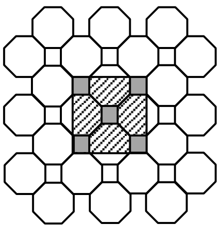
（２）

①　図④，⑤の２つの大きさの正方形を作図できます。ｂ＝３，６です。

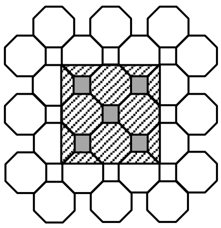
②　図⑥の大きさの正方形を作図できます。ｂ＝８です。

③　図⑦，⑧の２つの大きさの正方形を作図できます。ｂ＝１０，１５です。

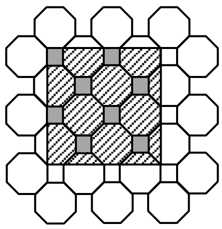
図④



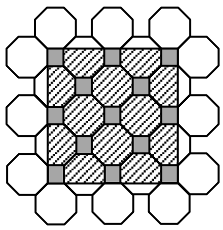
図⑤



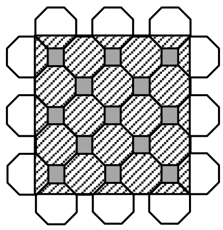
図⑥



図⑦



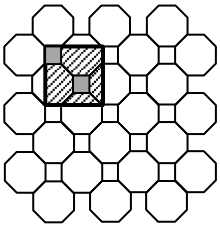
図⑧



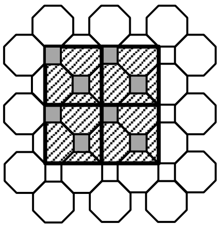
最難関問題

（３）作図できる正方形は，３つの種類に分けることができます。まず，（１）や（２）②で考えたような，４つの隅のうちの１つのみにちょうど敷きつめた正方形が入っているものは，図⑨～⑪のように，（１）の正方形を組みあわせて作ることができます。この場合，図⑨が正方形と正八角形２個ずつの面積なので，図⑩では２×（２×２）＝８（個）ずつ，図⑪では２×（３×３）＝１８（個）ずつ，となります。正方形も正八角形も，平方数の２倍の個数です。

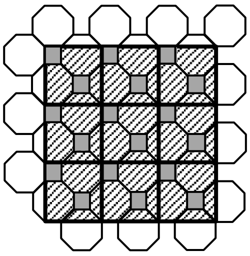
図⑨



図⑩

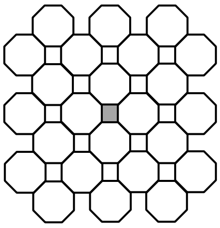


図⑪

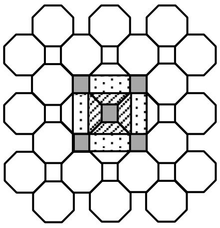


（２）の①や③で考えた正方形は，４つのすみに敷きつめた正方形が４つあるもの（図⑫～⑭）と，１つもないもの（図⑮～⑰）になっています。

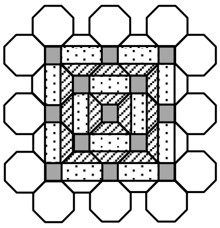
図⑫



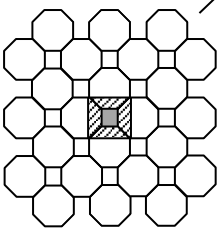
図⑬



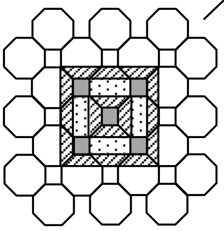
図⑭



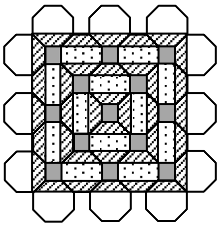
図⑮



図⑯



図⑰



正方形の個数は，１＋４＋８＋…と増えていきます。正八角形の個数は，図⑫～⑭では，あみめ部分に注目をすると，②×１×４÷④＝２（個），②×２×４÷④＝４（個），というように連続する偶数の個数で増えていきます。また，図⑮～⑰では，斜線部分に注目をすると，①×１×４÷④＝１（個），①×３×４÷④＝３（個），①×５×４÷④＝５（個），というように連続する奇数の個数で増えていきます。よって，正八角形の個数は図⑮，⑬，⑯，⑭，⑰の順に，１，３，６，１０，１５，…と三角数になります。

最難関問題

　こうして，正八角形の個数は平方数の２倍か三角数になるので，①および②の条件を満たすそれぞれの数を求めて解くことができます。

①　５０００以上の最小の平方数の２倍である数は，５０×５０×２＝５０００です。このとき，正八角形も正方形も５０００個となります。
　それに対して，５０００以上の最小の三角数は，
（１＋□）×□÷２　≧　５０００，
　（１＋□）×□　≧　１００００，となるので，
　１０１×１００　＝　１０１００，です。
正八角形の個数は１０１００÷２＝５０５０なので，条件を満たしません。
　よって，ａ＝５０００です。

②　１００００以上の最小の平方数の２倍である数は，７０×７０＝４９００を参考に探して，７１×７１×２＝１００８２です。このとき，正八角形も正方形も１００８２個となります。
　それに対して，１００００以上の最小の三角数は，
（１＋□）×□÷２　≧　１００００，
　（１＋□）×□　≧　２００００，となるので，１４０×１４０＝１９６００を参考に探して，
　１４２×１４１　＝　２００２２，です。
正八角形の個数は２００２２÷２＝１００１１なので，このときの正方形の個数を求めます。正八角形の個数が奇数番目の三角数にあたるので，図⑮～⑰の系列で規則をみていくと，次のようになります。

正八角形(個)	1	6	15	…	10011
正方形(個)	1	5	13	…	
差	0	1	2	…	

　１番目の奇数三角数＝１では差が０，２番目の奇数三角数＝６では差が１，
３番目の奇数三角数＝１５では差が２，…となるので，（１４１－１）÷２＋１＝７１（番目）の奇数三角数では差が７１－１＝７０となることから，ａ＝１００１１－７０＝９９４１です。