受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

２０２０の問題・７

$\frac{1}{2020}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$で，ＡはＢより小さいものとします。３つの数２０２０，Ａ，Ｂの最大公約数が１となるとき，$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$として考えられる式をすべて求めなさい。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

２０２０の問題・７

$$\frac{1}{2021}+\frac{1}{408240},\ \frac{1}{2036}+\frac{1}{257045},\ \frac{1}{2045}+\frac{1}{105236},\ \frac{1}{2420}+\frac{1}{12221}$$

分母２０２０を素因数分解して，

$$\frac{1}{2020}=\frac{1}{2\times2\times5\times101}=\frac{a+b}{2\times2\times5\times101\times(a+b)}$$

$=\dfrac{a}{2\times2\times5\times101\times(a+b)}+\dfrac{b}{2\times2\times5\times101\times(a+b)}=\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}$となるようなａ，ｂを考えます。

まず，無駄な約分を除くために，ａとｂは互いに素であるものとします。というのも，例えばａ＝２，ｂ＝４とすると，$\dfrac{2+4}{2\times2\times5\times101\times6}=\dfrac{1+2}{2\times2\times5\times101\times3}$と同じことになるからです。よって，ａとａ＋ｂ，ｂとａ＋ｂは約分できず，ＡとＢはａ＋ｂの倍数となります。

また，２０２０，ａ，ｂの最大公約数が１であるということから，ＡとＢの両方が２，５，１０１いずれかの倍数であってはいけません。よって，ａとｂは約分によって２×２，５，１０１を消すことが求められます。ａとｂが互いに素であることと合わせると，ａ×ｂ＝２０２０ですから，
（ａ，ｂ）＝（２０２０，１），（５０５，４），（４０４，５），（１０１，２０）の４通りが条件に当てはまり，以下のようになります。

$$\frac{2020+1}{2\times2\times5\times101\times2021}=\frac{1}{2021}+\frac{1}{2\times2\times5\times101\times2021}=\frac{1}{2021}+\frac{1}{408240},$$

$$\frac{505+4}{2\times2\times5\times101\times509}=\frac{1}{4\times509}+\frac{1}{5\times101\times509}=\frac{1}{2036}+\frac{1}{257045},$$

$$\frac{404+5}{2\times2\times5\times101\times409}=\frac{1}{5\times409}+\frac{1}{2\times2\times101\times409}=\frac{1}{2045}+\frac{1}{165236},$$

$$\frac{101+20}{2\times2\times5\times101\times121}=\frac{1}{2\times2\times5\times121}+\frac{1}{101\times121}=\frac{1}{2420}+\frac{1}{12221},$$