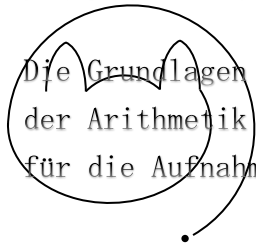


## 最難関問題

2020の問題・7

$\frac{1}{2020} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B}$ で、 $A$ は $B$ より小さいものとします。3つの数2020,  $A$ ,  $B$ の最大公約数が1となるとき、 $\frac{1}{A} + \frac{1}{B}$ として考えられる式をすべて求めなさい。



## 最難関問題

2020の問題・7

$$\frac{1}{2021} + \frac{1}{408240}, \frac{1}{2036} + \frac{1}{257045}, \frac{1}{2045} + \frac{1}{105236}, \frac{1}{2420} + \frac{1}{12221}$$

分母2020を素因数分解して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2020} &= \frac{1}{2 \times 2 \times 5 \times 101} = \frac{a+b}{2 \times 2 \times 5 \times 101 \times (a+b)} \\ &= \frac{a}{2 \times 2 \times 5 \times 101 \times (a+b)} + \frac{b}{2 \times 2 \times 5 \times 101 \times (a+b)} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \end{aligned}$$

となるような  $a, b$  を考えます。

まず、無駄な約分を除くために、 $a$  と  $b$  は互いに素であるものとします。というのも、例えば  $a=2$ ,

$$b=4 \text{ とすると, } \frac{2+4}{2 \times 2 \times 5 \times 101 \times 6} = \frac{1+2}{2 \times 2 \times 5 \times 101 \times 3}$$

と同じことになるからです。よって、 $a$  と  $a+b, b$  と  $a+b$  は約分できず、 $A$  と  $B$  は  $a+b$  の倍数となります。

また、2020,  $a, b$  の最大公約数が1であるということから、 $A$  と  $B$  の両方が2, 5, 101いずれかの倍数であってははいけません。よって、 $a$  と  $b$  は約分によって2×2, 5, 101を消すことが求められます。 $a$  と  $b$  が互いに素であることと合わせると、 $a \times b = 2020$  ですから、

$(a, b) = (2020, 1), (505, 4), (404, 5), (101, 20)$  の4通りが条件に当てはまり、以下のようになります。

$$\frac{2020+1}{2 \times 2 \times 5 \times 101 \times 2021} = \frac{1}{2021} + \frac{1}{2 \times 2 \times 5 \times 101 \times 2021} = \frac{1}{2021} + \frac{1}{408240},$$

$$\frac{505+4}{2 \times 2 \times 5 \times 101 \times 509} = \frac{1}{4 \times 509} + \frac{1}{5 \times 101 \times 509} = \frac{1}{2036} + \frac{1}{257045},$$

$$\frac{404+5}{2 \times 2 \times 5 \times 101 \times 409} = \frac{1}{5 \times 409} + \frac{1}{2 \times 2 \times 101 \times 409} = \frac{1}{2045} + \frac{1}{165236},$$

$$\frac{101+20}{2 \times 2 \times 5 \times 101 \times 121} = \frac{1}{2 \times 2 \times 5 \times 121} + \frac{1}{101 \times 121} = \frac{1}{2420} + \frac{1}{12221},$$