

反射と反復

図1の六角形A B C D E Fは、大きさの等しい正三角形を4個組みあわせた形をしています。頂点Aから辺EFに向けて小さな球を発射します。球は辺にぶつくと、図2のように入ってきたときと同じ角度ではね返ります。球は頂点にぶつくと停止します。以下の問いに答えなさい。必要であれば、2枚目のマス目を使いなさい。

図1

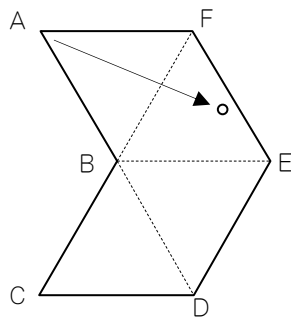
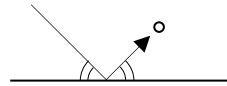


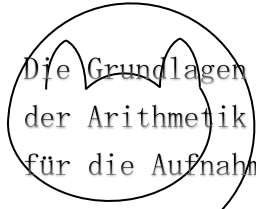
図2



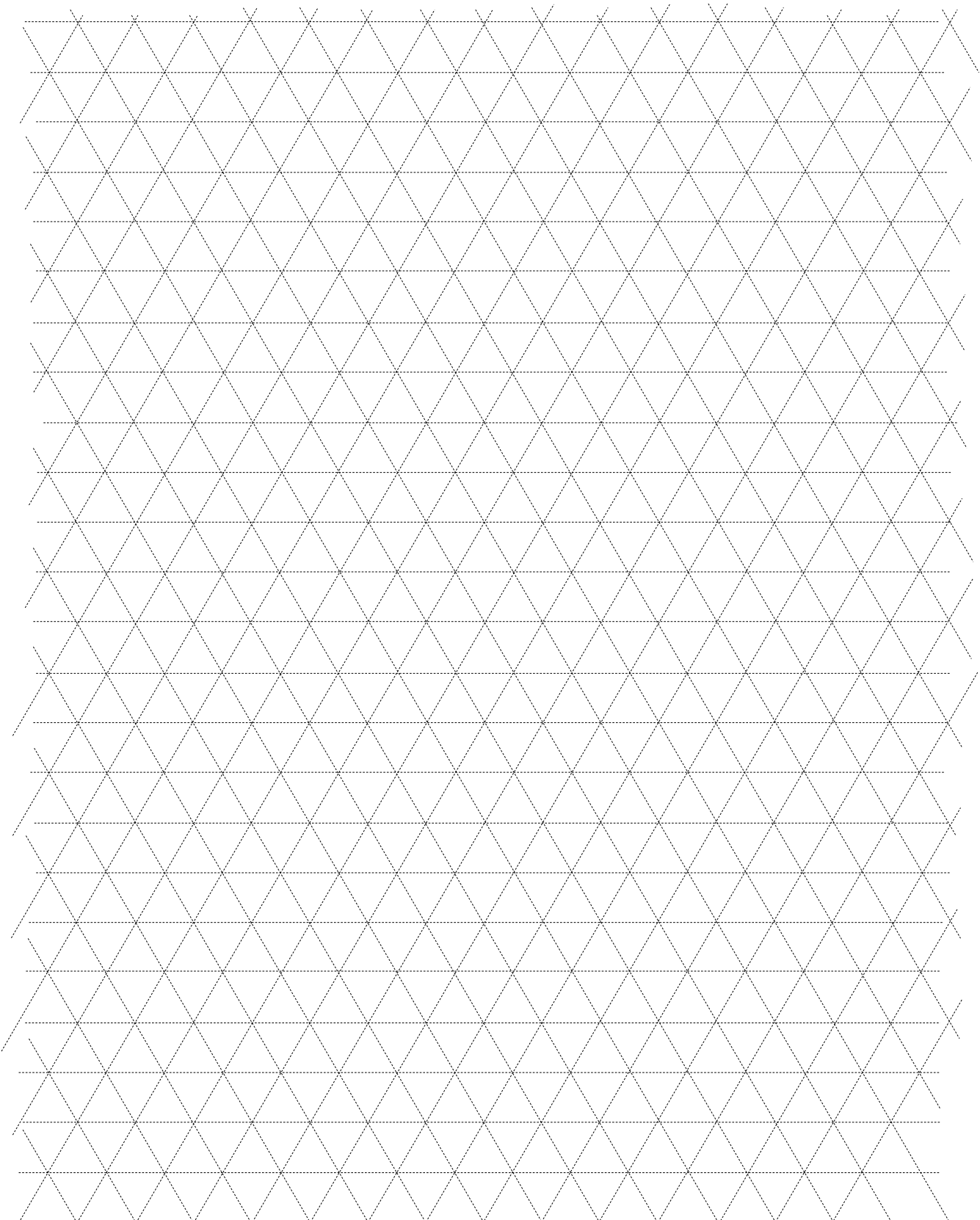
(1) 頂点Aから球を発射したところ、辺EF、CD、BCの順にはね返ってから頂点Eにぶつかって停止しました。球を辺EF上の頂点Fから何分の何の点に向けて発射しましたか。

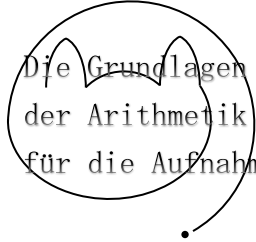
(2) 頂点Aから辺EFの頂点Fから $\frac{1}{41}$ の点に向けて球を発射すると、何回はね返ってどの頂点で停止しますか。

(3) 頂点Aから辺EFの頂点Fから $\frac{2}{87}$ の点に向けて球を発射すると、何回はね返ってどの頂点で停止しますか。



最難関問題

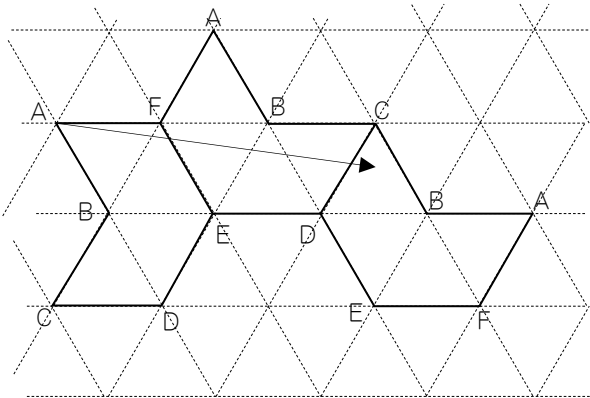




反射と反復 (1) $\frac{1}{4}$ (2) 40回, 頂点F (3) 87回, 頂点D

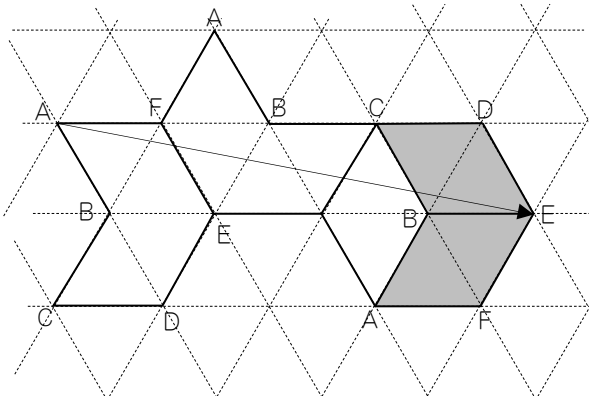
(1) 球がね返る辺を対称の軸として, 線対称な六角形の鏡映しをかいていきます。辺EF, CDではね返ったところまでを表すと, 図①になります。

図①

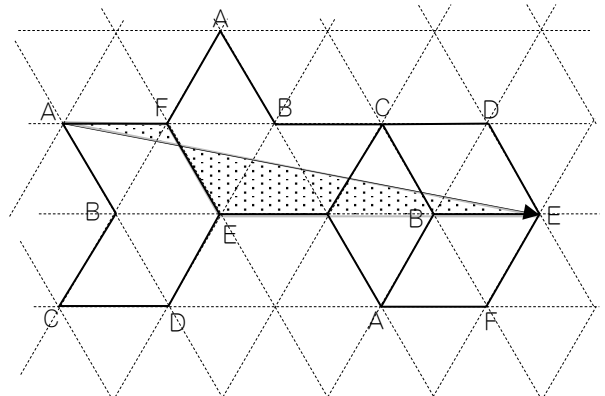


次に, 辺BCを対象の軸とした鏡映しをかくと, 図②のようにになります。4個目の六角形は3個目と重なるので, 影をつけて表しています。こうして球は頂点Eにぶつかって停止するので, 図③のあみ目部分の三角形が1:3の相似であることから, 球は辺EF上の頂点Fから $\frac{1}{4}$ の点に向けて発射されています。

図②

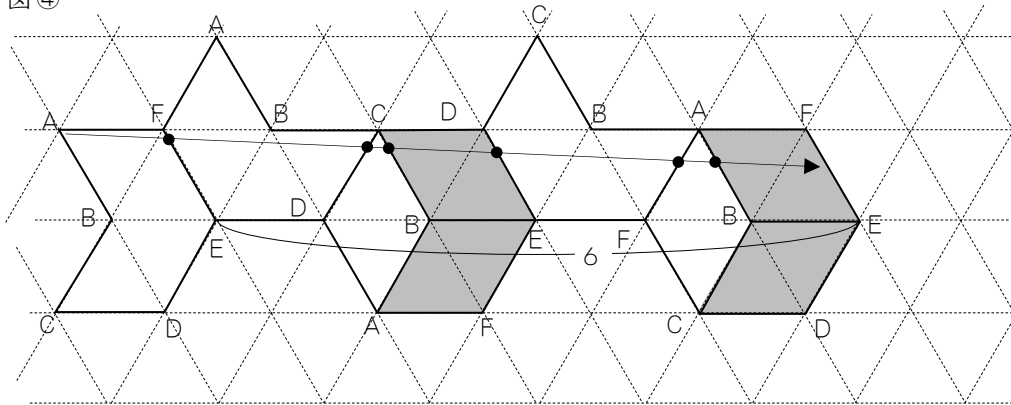


図③



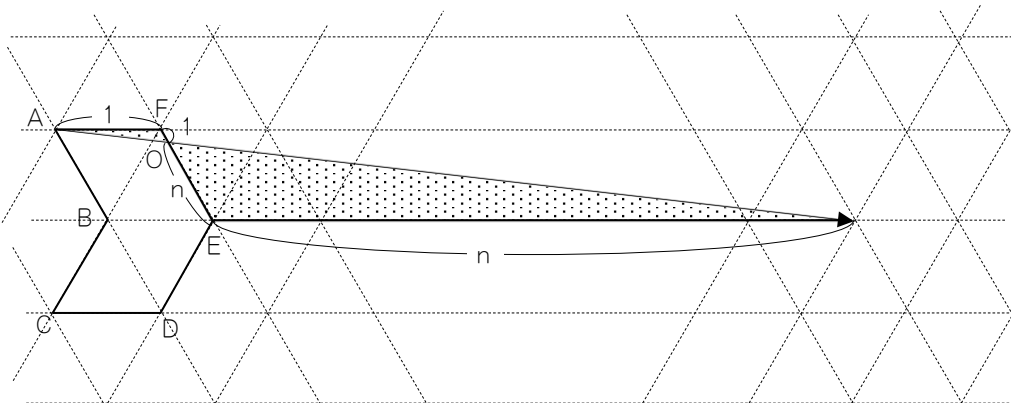
(2) (1) と同様に矢印がほぼ横に進んでいくと考えると、六角形の鏡映しは図④のようになって、6個目につけ加えた六角形は最初の六角形と同じ向きになります。よって、以降は同じ並びが繰り返されます。また、6個目の六角形が現れるまでに矢印は6本の辺を通過するので、6回はね返ります。

図④



球が辺EFの頂点Eから $\frac{1}{n+1}$ の点に向けて発射された場合、球の動きは図⑤の矢印で表すことができます。

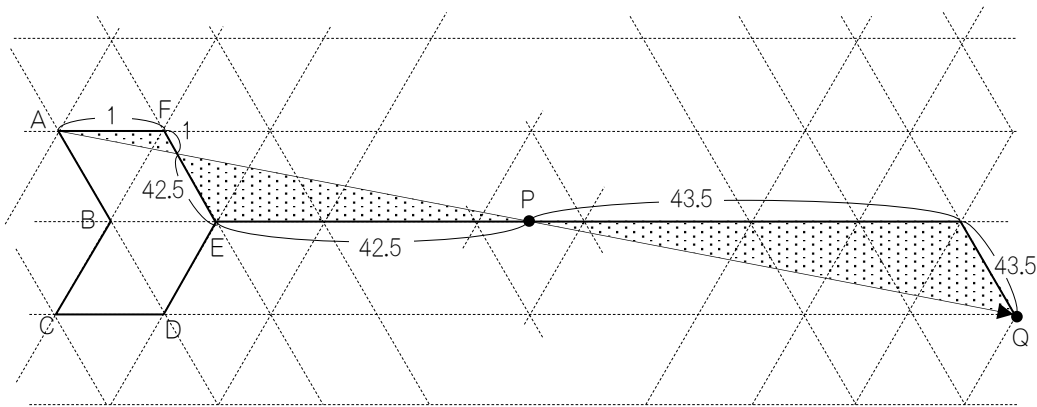
図⑤



右にn進む部分では頂点がEから始まり、 $\boxed{D, B, E, F, B, E}$, D, B, ...と、 $\boxed{D, B, E, F, B, E}$ がくり返されます。(2) では $n=40$ ですから、 $40 \div 6 = 6$ 余り4より、40回はね返ってから、周期の4個目の頂点Fに、球はぶつかって停止します。

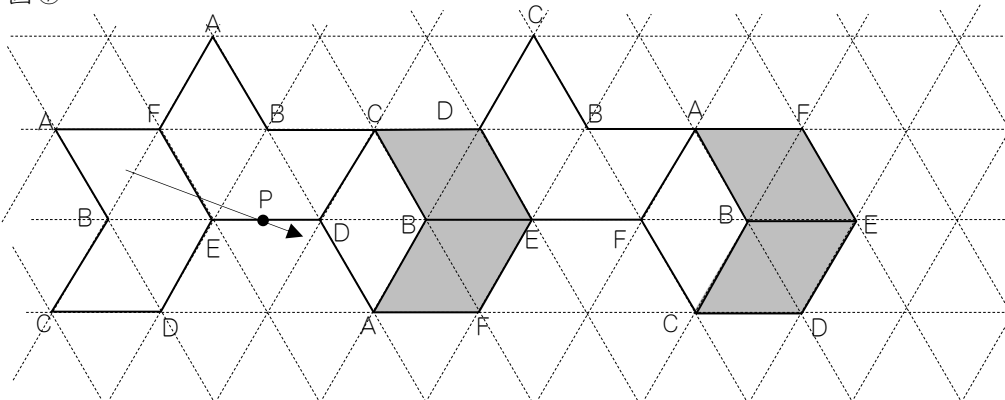
- (3) $\frac{2}{87} = \frac{1}{43.5}$ ですから、矢印は図⑥のようになって、「2段下がったところ」でちょうど正三角形の頂点Qに届きます。とは言え、Qが六角形の頂点に一致するかどうかは別に考えなければなりません。

図⑥



そこで、まずは図⑥の点Pを考えます。点Pは頂点Eから右に42.5マス分進んだところにありますから、ちょうど正三角形の辺の中点にあたります。42.5 ÷ 6 = 7余り0.5より、点Pは D, B, E, F, B, E の周期の最後のEと1番目のDの中点にあたるので、図⑦のような位置になります。また、球がはね返った回数は、点Pでののはね返りも含めると、43回です。

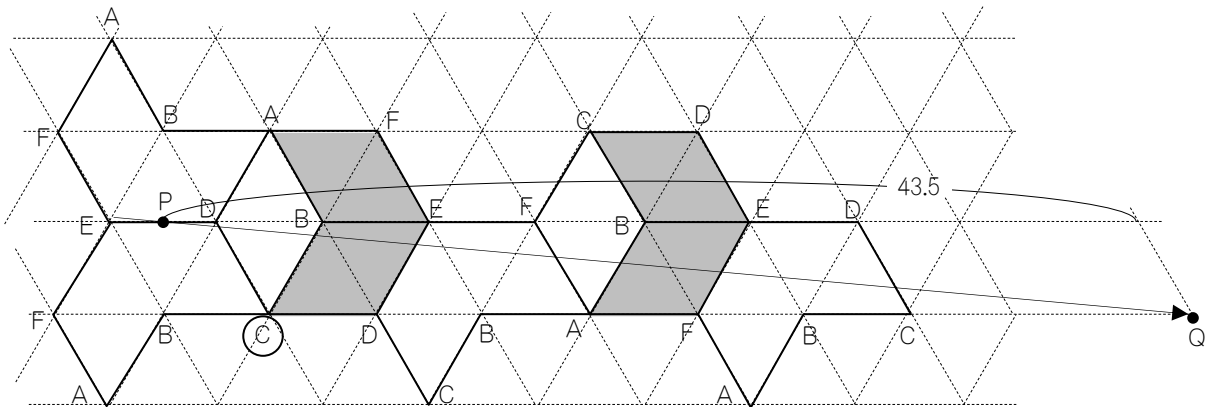
図⑦



最難関問題

点Pを通過したあとの矢印にしたがって六角形の鏡映しをかいていくと、図⑧のようになります。六角形が重なるところでは後にかいた方の六角形に影をつけ、頂点名も影をつけた六角形にしたがっています。すると、この場合も六角形は6個ごとに元の向きに戻る周期性を示します。点Qは図⑧において○をつけたCから43個進んだ頂点ですから、D, B, A, F, B, Cの周期の43番目を求めて、 $43 \div 6 = 7$ 余り 1 より、周期の1番目のDに一致します。

図⑧



最後に、点Pではね返った後で、さらに何回はね返ったかを考えます。図⑧の○をつけたCでは0回です。ここから右に進んでいくと、Dでは2回、Bでは3回、Aでも3回、Fでは5回、Bでは6回、Cでも6回となりますから、1周期では6回はね返りますが、1周期の中ではやや変則的になっています。43 \div 6 = 7 余り 1 より、7回周期をくり返した後のDで停止するので、 $6 \times 7 + 2 = 44$ (回) です。

以上より、 $43 + 44 = 87$ (回) はね返って、頂点Dで停止します。