最難関問題

２０２０の問題・８

　２０２０の倍数である２０２０，４０４０，６０６０，…，にそれぞれ約数が何個あるかを考えます。なお，２０２０の倍数のうちで最も約数の個数が少ないのは２０２０自身で，１２個です。

（１）約数が３番目に少ない２０２０の倍数をすべて答えなさい。

（２）約数が６番目に少ない２０２０の倍数の，約数の個数を求めなさい。

（３)約数が１０番目に少ない２０２０の倍数のうち,小さいほうから４番目と１０番目の数を答えなさい。

最難関問題

２０２０の問題・８　（１）１０１００，２０４０２０　（２）２７個
（３）４番目…８０８００，１０番目…１９１９００

（１）２０２０を素因数分解すると，２０２０＝２×２×５×１０１です。素因数分解を利用して，２０２０の約数の個数は次のように求めることができます。

$$\underbrace{2\times2}_{2\text{個}}\times\underbrace{5}_{1\text{個}}\times\underbrace{101}_{1\text{個}}$$

$$\downarrow\qquad\downarrow\qquad\downarrow$$

$$3\times2\times2=12(\text{個})$$

ここで，２０２０×２＝４０４０，２０２０×３＝６０６０の約数の個数について考えてみます。

$\boxed{4040}$

$$\underbrace{2\cdots2}_{3\text{個}}\times\underbrace{5}_{1\text{個}}\times\underbrace{101}_{1\text{個}}$$

$$\downarrow\qquad\downarrow\qquad\downarrow$$

$$4\times2\times2=16(\text{個})$$

$\boxed{6060}$

$$\underbrace{2\cdots2}_{2\text{個}}\times\underbrace{5}_{1\text{個}}\times\underbrace{101}_{1\text{個}}\times\underbrace{3}_{1\text{個}}$$

$$\downarrow\qquad\downarrow\qquad\downarrow\qquad\downarrow$$

$$4\times2\times2\times2=24(\text{個})$$

４０４０の場合，約数の個数を求めるかけ算において３が４になるので，約数の個数は$\frac{4}{3}$倍になって，１２×$\frac{4}{3}$＝１６（個），６０６０の場合はかけ算において×２が加わるので（あるいは１が２になるので），約数の個数は$\frac{2}{1}$倍になって１２×$\frac{2}{1}$＝２４（個）になります。４０４０にさらに２をかけた８０８０＝２×２×２×２×５×１０１の場合，約数の個数を求めるかけ算において３が５になるので，約数の個数は$\frac{5}{3}$倍になって，１２×$\frac{5}{3}$＝２０（個）になります。

２０２０に５か１０１をかけると，約数の個数を求めるかけ算において２が３になるので，約数の個数は$\frac{3}{2}$倍になって，１２×$\frac{3}{2}$＝１８（個）になります。

よって，２０２０×５＝１０１００，２０２０×１０１＝２０４０２０です。

最難関問題

（２）２０２０に２をかけていくと約数の個数は$\frac{4}{3}$倍，$\frac{5}{3}$倍，$\frac{6}{3}$倍，…，となり，５をかけていくと（あるいは１０１をかけていくと）約数の個数は$\frac{3}{2}$倍，$\frac{4}{2}$倍，$\frac{5}{2}$倍，…，となり，その他の素数をかけていくと約数の個数は２倍，３倍，４倍，…，となります。これのみを考えると，２０２０の倍数の約数の個数は，１２個の１倍，$\frac{4}{3}$倍，$\frac{3}{2}$倍，$\frac{5}{3}$倍，２倍，$\frac{7}{3}$倍，$\frac{5}{2}$倍，…となりそうです。

しかし，２０２０×２×５のように異なる素数をかけることもできるので，実際には以上の倍をかけあわせたものも考えなければなりません。すると，次のようになります。

○整数倍…２，５，１０１以外の同じ素数をかけ続けるだけで２倍以上がすべて可能

○$\frac{N}{2}$倍…５のみ，あるいは１０１のみをかけ続けることで，$\frac{3}{2}$倍以上がすべて可能

○$\frac{N}{3}$倍…２をかけ続けることで，$\frac{4}{3}$倍以上がすべて可能

○$\frac{N}{4}$倍…５と１０１をいくつかかけあわせることで，$\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$（倍），$\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}=\frac{15}{4}$（倍）等が可能

○$\frac{N}{6}$倍…５（あるいは１０１）と２をいくつかかけあわせることで，$\frac{5}{2}\times\frac{5}{3}=\frac{25}{6}$（倍）等が可能

○$\frac{N}{12}$倍…５，１０１，２をいくつかかけあわせることで，$\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{5}{3}=\frac{125}{12}$（倍）等が可能

よって，２０２０の倍数の約数の個数は，１２個の１倍，$\frac{4}{3}$倍，$\frac{3}{2}$倍，$\frac{5}{3}$倍，２倍，$\frac{9}{4}$倍，$\frac{7}{3}$倍，$\frac{5}{2}$倍，…となります。６番目に少ないのは，$12\times\frac{9}{4}=27$（個）です。

最難関問題

（３）（２）に引き続いて考えると，２０２０の倍数の約数の個数は，１２個の１倍，$\frac{4}{3}$倍，$\frac{3}{2}$倍，$\frac{5}{3}$倍，２倍，$\frac{9}{4}$倍，$\frac{7}{3}$倍，$\frac{5}{2}$倍，$\frac{8}{3}$倍，３倍となりますから，１０番目に少ない個数は１２×３＝３６（個）です。

３倍は，例えば$\frac{3}{2}$×２＝３（倍）のようにしてもできるので，素数をどう組み合わせるかを考えます。

$\boxed{\text{１種類の素数をかける場合}}$

○５，１０１

３＝$\frac{6}{2}$ですから，５か１０１を４個かけます。５の場合は２０２０の６２５倍，１０１の場合はあまりに大きくなるので差し当たっては計算しなくてよいでしょう。

○２

３＝$\frac{9}{3}$ですから，２を６個かけて，２０２０の６４倍です。

○その他の素数

素数○を２個かけますから，小さい順に２０２０の３×３＝９（倍），４９倍，１２１倍，１６９倍，２８９倍，…となります。

最難関問題

２種類の素数をかける場合

○５と１０１

$\frac{3}{2}$倍以上の組合せですから，$3=\frac{12}{4}=\frac{3}{2}\times\frac{4}{2}$のみが条件を満たします。よって，２０２０の５×５×１０１（倍）か５×１０１×１０１（倍）です。

○５と２（１０１と２）

$\frac{3}{2}$倍以上と$\frac{4}{3}$倍以上の組合せですから，$3=\frac{18}{6}=\frac{3}{2}\times\frac{6}{3}$のみが条件を満たします。よって，２０２０の５×２×２×２＝４０（倍）か１０１×２×２×２＝８０８（倍）です。

○５とその他の素数（１０１とその他の素数）

$\frac{3}{2}$倍以上と２以上の整数の組合せですから，$3=\frac{3}{2}\times 2$のみが条件を満たします。よって，２０２０の５×３＝１５（倍），５×７＝３５倍，５５倍，６５倍，８５倍，９５倍，１１５倍，１４５倍，１５５倍，…と，１０１×３＝３０３（倍），７０７倍，１１１１倍，…です。

○２とその他の素数

$\frac{4}{3}$倍以上と２以上の整数の組合せですから，$\frac{4}{3}\times 3=4$となってしまい，積が整数の場合３より大きくなってしまいます。よって，条件を満たすものはありません。

○その他の素数を２種類

２以上の２つの整数の組合せですから，積が３にはならず，条件を満たしません。

最難関問題

３種類の素数をかける場合

〇５と１０１と２

$\frac{3}{2}$倍以上と$\frac{4}{3}$倍以上の組合せですから，$3=\frac{36}{12}=\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}$のみが条件を満たします。よって，２０２０の５×２×１０１＝１０１０（倍）です。

〇そのほかの素数を含む組合せ

３種類の素数の組合せの場合，２以上の３つの数のかけ算となりますから，積が3になることはあり得ません。2種類の素数と２か５か１０１の組合せの場合，２以上の２つの整数の積は最も小さくても２×２＝４であるため，分数は$\frac{3}{4}$以下となります。ところが分数は必ず１以上ですから，条件を満たすものはありません。1種類の素数と２，５，１０１のいずれか２つとの組合せの場合，２以上の整数と２つの分数の積が３となるため，２つの分数の積は３÷２＝1.5以下です。しかし，２つの分数の積は最も小さくても$\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{16}{9}$ですから，1.5より大きくなります。よって，条件を満たすものはありません。

また，４種類以上の素数をかける場合は，必ず２，５，１０１以外の素数を含むので，同様にして条件を満たすことはありません。

以上で一通りの組合せを見たので，小さい順に並べていきます。２０２０の9倍，１５倍，３５倍，４０倍，４９倍，５５倍，６４倍，６５倍，８５倍，９５倍となるので，
４番目に小さい数は２０２０×４０＝８０８００，
１０番目に小さい数は２０２０×９５＝１９１９００です。