

最難関問題

2の累乗数の積

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128$ なので、128は2を7個かけ合わせた数です。このように、2をいくつかかけ合わせた数の下2桁^{けた}について考えます。例えば、128の下2桁は28、8の下2桁は08と考えます。

- (1) 2を101個かけ合わせた数の下2桁を答えなさい。
- (2) 64を何個かけ合わせると、下2桁が64になりますか。1個の次に少ない個数を答えなさい。
- (3) ある整数Aは、2をいくつかかけ合わせた数で、Aを何個かけ合わせてもAの下2桁は変わりません。整数Aの下2桁として考えられるものをすべて答えなさい。
- (4) 2を2個以上かけ合わせたすべての整数は、個かけ合わせると下2桁が元に戻ります。に当てはまる最も小さい数を答えなさい。
- (5) ある整数Bは、2を個かけ合わせた数で、Bを個かけ合わせると下2桁が44、さらに7個かけ合わせると下2桁が12になります。に当てはまる最も小さい数を答えなさい。また、そのときにに当てはまる最も小さい数を答えなさい。



最難関問題

2の累乗数の積 (1) 52 (2) 11個 (3) 76 (4) 21 (5) ...13, ...6

(1) 2から順に、下2桁のみに注目して2倍していくと、

02, 04, 08, 16, 32, 64, 28, 56, 12, 24, 48, 96, 92, 84, 68,
36, 72, 44, 88, 76, 52, 04, 08, ...となつて、1周目の02と2周目以降の52の

違いを除けば、20個の数の周期になります。

$101 \div 20 = 5$ 余り1より、2周目以降の周期の1番目の数である52です。

(2) $64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ より、64は2を6個かけ合わせた数なので、64どうしを掛け合わせると、(1)で求めた20個の数の周期を6つつ進みます。

よつて、64, 96, 44と進み、

02, 04, 08, 16, 32, 64, 28, 56, 12, 24, 48, 96, 92, 84, 68,
36, 72, 44, 88, 76

続いて16, 24, 36と進んでいきます。

52, 04, 08, 16, 32, 64, 28, 56, 12, 24, 48, 96, 92, 84, 68,
36, 72, 44, 88, 76

結局20個の数の繰り返しを6つつ進むので、20と6の最小公倍数より60進んだときに元に戻ります。 $60 \div 6 = 10$ (回) 進むので、11個です。

(3) 20個の周期なので、20ずつ進むときのみ、毎回下2桁が76になって変わることがありません。よつて、76です。

(4) 20個の周期なので、元に戻るのは20の約数にあたる回数進んだ場合です。よつて、どの数も20回進めば元に戻るなので、21個です。

(5) 44は周期中の18番目、12は9番目に現れます。

18番目から9番目に進むには、

$(20 - 18) + 9 = 11$, $11 + 20 \times 1 = 31$, $11 + 20 \times 2 = 51$, ...進めばよく、これらのうちで7の倍数である最小の場合は、 $11 + 20 \times 4 = 91$ (個) 進むときです。 $91 \div 7 = 13$ より、最も小さいBは2を13個かけ合わせた数なので、は13です。

Bの下2桁は周期の13番目の92で、Bを掛け合わせるとに周期を13個進むので、

$13 \times 6 = 78$ (個) 進んだときに、 $78 \div 20 = 3$ 余り18より、下2桁が周期の18番目の44になります。よつて、は6です。