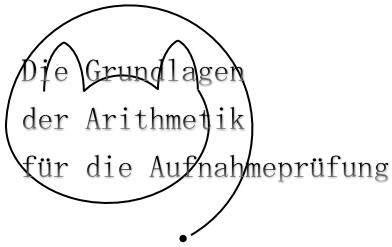


受験算数の基礎



最難関問題

2023の問題・帯分数

2023の上2桁を^{けた}帯分数の整数部分、十の位を分子、一の位を分母とすると、 $20\frac{2}{3}$ になります。この方法で、2023年から9999年までの年号を帯分数にします。ただし、十の位は1以上の数で、一の位は十の位より大きい数となっている年号のみを考えます。よって、2033から $20\frac{3}{3}$ のような分数を作ることはありません。

次に、帯分数を仮分数の既約分数にします。2023であれば $\frac{62}{3}$ 、2024であれば $\frac{41}{2}$ です。このときの分子に注目をして、 $[2023] = 62$ 、 $[2024] = 41$ とします。

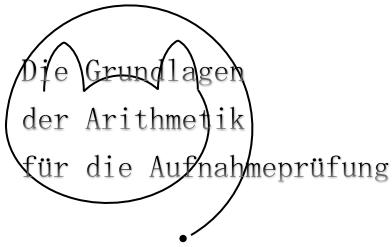
(1) $[2036]$, $[2046]$ をそれぞれ求めなさい。

(2) $[A] = 161$ となるAは何個ありますか。

(3) ある整数nについて、 $[B] = n$ となるBが14個あります。nとして考えることができる整数のうち、最も小さいものと最も大きいものをそれぞれ答えなさい。

(4) ある整数mについて、 $[C] = m$ となるCが1個だけあり、Cの一の位は9です。mとして考えることができる整数は何個ありますか。

受験算数の基礎



最難関問題

2023の問題・帯分数

- (1) $[2036] = 41$, $[2046] = 62$ (2) 11個 (3) 187, 199 (4) 111個

(1) $20\frac{3}{6} = 20\frac{1}{2} = \frac{41}{2}$ より, $[2036] = 41$ です。 $20\frac{4}{6} = 20\frac{2}{3} = \frac{62}{3}$ より,
 $[2046] = 62$ です。

(2) 仮分数の既約分数は $\frac{161}{\square}$ なので, □にあてはまる数で場合分けをします。

$$\textcircled{O} \frac{161}{2} = 80\frac{1}{2} \text{ の場合, } 80\frac{1}{2} = 80\frac{2}{4} = 80\frac{3}{6} = 80\frac{4}{8} \text{ より,}$$

Aは8012, 8024, 8036, 8048の4通りです。

$$\textcircled{O} \frac{161}{3} = 53\frac{2}{3} \text{ の場合, } 53\frac{2}{3} = 53\frac{4}{6} = 53\frac{6}{9} \text{ より,}$$

Aは5323, 5346, 5369の3通りです。

$$\textcircled{O} \frac{161}{4} = 40\frac{1}{4} \text{ の場合, } 40\frac{1}{4} = 40\frac{2}{8} \text{ より, Aは4014, 4028の2通りです。}$$

$$\textcircled{O} \frac{161}{5} = 32\frac{1}{5} \text{ の場合, Aは3215の1通りです。}$$

$$\textcircled{O} \frac{161}{6} = 26\frac{5}{6} \text{ の場合, Aは2656の1通りです。}$$

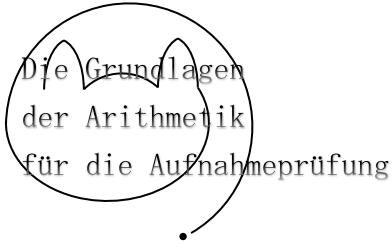
$$\textcircled{O} \frac{161}{7} \text{ は } 161 = 7 \times 23 \text{ より, 既約分数ではないので条件を満たしません。}$$

$$\textcircled{O} \frac{161}{8} = 20\frac{1}{8} \text{ の場合, Aは2018となりますが, 2023より前の年号なので条件を満たしません。}$$

$$\textcircled{O} \frac{161}{9} = 17\frac{8}{9} \text{ の場合, Aは1789となりますが, 2023より前の年号なので条件を満たしません。}$$

以上より, $4 + 3 + 2 + 1 \times 2 = 11$ (個) です。

受験算数の基礎



最難関問題

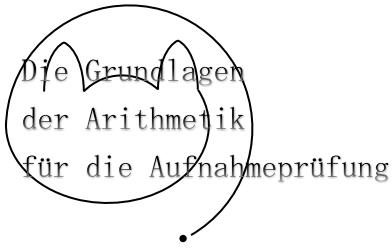
(3) 仮分数の既約分数は $\frac{n}{\square}$ です。ここで(2)を参考にすると、 $\frac{n}{2}$ が既約分数である場合、 $\frac{n}{2} = \Delta \frac{1}{2}$ について、分数部分が $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$ の4通りなので、4個のBがあります。同様に、 $\frac{n}{3}$ ではBは3個、 $\frac{n}{4}$ ではBは2個、 $\frac{n}{5}$ から $\frac{n}{9}$ ではBは各1個なので、 $4 + 3 + 2 + 1 \times 5 = 14$ (個) がBの考え方の最大の個数ということになります。

このときのnの条件として、2～9と互いに素であること、 $\frac{n}{2}$ となるBが9999以下で、 $\frac{n}{9}$ となるBが2023以上であることが挙げられます。

$\frac{n}{2}$ となるBが9999以下ということから、9912のときの $99 \frac{1}{2} = \frac{199}{2}$ より、nは199以下であり、199は1桁の素数2, 3, 5, 7のどれでも割り切れないで、199が最も大きいnです。

$\frac{n}{9}$ となるBが2023以上ということから、2029のときの $20 \frac{2}{9} = \frac{182}{9}$ より、nは182以上であり、2, 3, 5, 7のどれでも割り切れない182以上の最小の整数は187なので、187が最も小さいnです。

受験算数の基礎



最難関問題

(4) Cの一の位が9ということは、仮分数の既約分数が $\frac{m}{9}$ のみということです。年号は2023以上99

99以下なので、条件に合うのは2029のときの $20\frac{2}{9} = \frac{182}{9}$ のm=182以上、9989のと

きの $99\frac{8}{9} = \frac{899}{9}$ のm=899以下です。また、 $\frac{m}{9}$ が既約分数ということから、mは3で割り切れ

ない数です。mは以下のように場合分けできます。

○ $\frac{m}{8}$ となる年号が9999より大きくなる場合

一の位が8で十の位が1以上7以下の最も大きい年号は9978です。このとき、 $99\frac{7}{8} = \frac{799}{8}$ な
ので、m=799です。よって、mが800以上の場合、[C]=mとなる9999以下のCは、一の
位が9でなければなりません。

mが800以上899以下の3で割り切れない数のときに[C]=mとなるCはただ1つだけで、そ
の一の位は9となります。

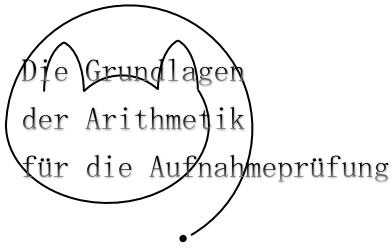
$799 \div 3 = 266$ 余り1、 $899 \div 3 = 299$ 余り2より、 $100 - (299 - 266) = 67$ (個)
がこの条件を満たします。

○ $\frac{m}{7}$ となる年号が9999より大きくなり、mが2の倍数の場合

この場合、 $\frac{m}{8}$ は既約分数ではないので、 $\frac{m}{9}$ のみが条件を満たします。 $99\frac{6}{7} = \frac{699}{7}$ なので、mは
700以上799以下の3で割りきれない2の倍数です。

$699 \div 2 = 349$ 余り1、 $799 \div 2 = 399$ 余り1より、2の倍数は $399 - 349 = 50$ (個)
あり、 $699 \div 6 = 116$ 余り3、 $799 \div 6 = 133$ 余り1より、6の倍数は $133 - 116 = 17$
(個)あるので、 $50 - 17 = 33$ (個)が条件を満たします。

受験算数の基礎



最難関問題

○ $\frac{m}{5}$ となる年号が9999より大きくなり，mが2と7の倍数の場合

この場合， $\frac{m}{8}$, $\frac{m}{7}$, $\frac{m}{6}$ は既約分数ではないので， $\frac{m}{9}$ のみが条件を満たします。 $99\frac{4}{5}=\frac{499}{5}$ なので，mは500以上699以下の3で割りきれない2と7の公倍数です。

$499 \div 14 = 35$ 余り9, $699 \div 14 = 49$ 余り13より，2と7の公倍数は
 $49 - 35 = 14$ （個）あり， $499 \div 42 = 11$ 余り37, $699 \div 42 = 16$ 余り27より，2と7と3の公倍数は $16 - 11 = 5$ （個）あるので， $14 - 5 = 9$ （個）です。

○ $\frac{m}{3}$ となる年号が9999より大きくなり，mが2と5と7の倍数の場合

この場合， $\frac{m}{8}$, $\frac{m}{7}$, $\frac{m}{6}$, $\frac{m}{5}$, $\frac{m}{4}$ は既約分数ではないので， $\frac{m}{9}$ のみが条件を満たします。 $99\frac{2}{3}=\frac{299}{3}$ なので，mは300以上499以下の3で割りきれない2と5と7の公倍数ですから，350, 490の2個が条件を満たします。

$\frac{m}{3}$ が既約分数の場合は $\frac{m}{9}$ も既約分数となるので，これ以降はありません。よって，

$67 + 33 + 9 + 2 = 111$ （個）です。