受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

２０２３の問題・帯分数

２０２３の上２桁(けた)を帯分数の整数部分，十の位を分子，一の位を分母とすると，２０$\frac{2}{3}$になります。この方法で，２０２３年から９９９９年までの年号を帯分数にします。ただし，十の位は１以上の数で，一の位は十の位より大きい数となっている年号のみを考えます。よって，２０３３から２０$\frac{3}{3}$のような分数を作ることはありません。

次に，帯分数を仮分数の既約分数にします。２０２３であれば$\frac{62}{3}$，２０２４であれば$\frac{41}{2}$です。このときの分子に注目をして，［２０２３］＝６２，［２０２４］＝４１とします。

（１）［２０３６］，［２０４６］をそれぞれ求めなさい。

（２）［Ａ］＝１６１となるＡは何個ありますか。

（３）ある整数ｎについて，［Ｂ］＝ｎとなるＢが１４個あります。ｎとして考えることができる整数のうち，最も小さいものと最も大きいものをそれぞれ答えなさい。

（４）ある整数ｍについて，［Ｃ］＝ｍとなるＣが１個だけあり，Ｃの一の位は９です。ｍとして考えることができる整数は何個ありますか。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

２０２３の問題・帯分数

（１）［２０３６］＝４１，［２０４６］＝６２　（２）１１個　（３）１８７，１９９　（４）１１１個

（１）$20\frac{3}{6}=20\frac{1}{2}=\frac{41}{2}$より，［２０３６］＝４１です。$20\frac{4}{6}=20\frac{2}{3}=\frac{62}{3}$より，

［２０４６］＝６２です。

（２）仮分数の既約分数は$\frac{161}{\square}$なので，□にあてはまる数で場合分けをします。

○$\frac{161}{2}=80\frac{1}{2}$の場合，$80\frac{1}{2}=80\frac{2}{4}=80\frac{3}{6}=80\frac{4}{8}$より，

Ａは８０１２．８０２４，８０３６，８０４８の４通りです。

○$\frac{161}{3}=53\frac{2}{3}$の場合，$53\frac{2}{3}=53\frac{4}{6}=53\frac{6}{9}$より，

Ａは５３２３，５３４６，５３６９の３通りです。

○$\frac{161}{4}=40\frac{1}{4}$の場合，$40\frac{1}{4}=40\frac{2}{8}$より，Ａは４０１４，４０２８の２通りです。

○$\frac{161}{5}=32\frac{1}{5}$の場合，Ａは３２１５の１通りです。

○$\frac{161}{6}=26\frac{5}{6}$の場合，Ａは２６５６の１通りです。

○$\frac{161}{7}$は１６１＝７×２３より，既約分数ではないので条件を満たしません。

○$\frac{161}{8}=20\frac{1}{8}$の場合，Ａは２０１８となりますが，２０２３より前の年号なので条件を満たしません。

○$\frac{161}{9}=17\frac{8}{9}$の場合，Ａは１７８９となりますが，２０２３より前の年号なので条件を満たしません。

以上より，４＋３＋２＋１×２＝１１（個）です。

最難関問題

（３）仮分数の既約分数は$\frac{n}{\square}$です。ここで（２）を参考にすると，$\frac{n}{2}$が既約分数である場合，$\frac{n}{2}=\triangle\frac{1}{2}$について，分数部分が$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{6}$，$\frac{4}{8}$の４通りなので，４個のＢがあります。同様に，$\frac{n}{3}$ではＢは３個，$\frac{n}{4}$ではＢは２個，$\frac{n}{5}$から$\frac{n}{9}$ではＢは各１個なので，４＋３＋２＋１×５＝１４（個）がＢの考えうる最大の個数ということになります。

このときのｎの条件として，２～９と互いに素であること，$\frac{n}{2}$となるＢが９９９９以下で，$\frac{n}{9}$となるＢが２０２３以上であることが挙げられます。

$\frac{n}{2}$となるＢが９９９９以下ということから，９９１２のときの９９$\frac{1}{2}=\frac{199}{2}$より，ｎは１９９以下であり，１９９は１桁の素数２，３，５，７のどれでも割り切れないので，１９９が最も大きいｎです。

$\frac{n}{9}$となるＢが２０２３以上ということから，２０２９のときの２０$\frac{2}{9}=\frac{182}{9}$より，ｎは１８２以上であり，２，３，５，７のどれでも割り切れない１８２以上の最小の整数は１８７なので，１８７が最も小さいｎです。

最難関問題

（４）Ｃの一の位が９ということは，仮分数の既約分数が$\frac{m}{9}$のみということです。年号は２０２３以上９９９９以下なので，条件に合うのは２０２９のときの$20\frac{2}{9}=\frac{182}{9}$のｍ＝１８２以上，９９８９のときの$99\frac{8}{9}=\frac{899}{9}$のｍ＝８９９以下です。また，$\frac{m}{9}$が既約分数ということから，ｍは３で割り切れない数です。ｍは以下のように場合分けできます。

○$\frac{m}{8}$となる年号が９９９９より大きくなる場合

一の位が８で十の位が１以上７以下の最も大きい年号は９９７８です。このとき，$99\frac{7}{8}=\frac{799}{8}$なので，ｍ＝７９９です。よって，ｍが８００以上の場合，［Ｃ］＝ｍとなる９９９９以下のＣは，一の位が９でなければなりません。

ｍが８００以上８９９以下の３で割り切れない数のときに［Ｃ］＝ｍとなるＣはただ１つだけで，その一の位は９となります。

７９９÷３＝２６６余り１，８９９÷３＝２９９余り２より，１００－（２９９－２６６）＝６７（個）がこの条件を満たします。

○$\frac{m}{7}$となる年号が９９９９より大きくなり，ｍが２の倍数の場合

この場合，$\frac{m}{8}$は既約分数ではないので，$\frac{m}{9}$のみが条件を満たします。$99\frac{6}{7}=\frac{699}{7}$なので，ｍは７００以上７９９以下の３で割りきれない２の倍数です。

６９９÷２＝３４９余り１，７９９÷２＝３９９余り１より，２の倍数は３９９－３４９＝５０（個）あり，６９９÷６＝１１６余り３，７９９÷６＝１３３余り１より，６の倍数は１３３－１１６＝１７（個）あるので，５０－１７＝３３（個）が条件を満たします。

最難関問題

○$\frac{m}{5}$となる年号が９９９９より大きくなり，ｍが２と７の倍数の場合

この場合，$\frac{m}{8}$，$\frac{m}{7}$，$\frac{m}{6}$は既約分数ではないので，$\frac{m}{9}$のみが条件を満たします。$99\frac{4}{5}=\frac{499}{5}$なので，ｍは５００以上６９９以下の３で割りきれない２と７の公倍数です。

４９９÷１４＝３５余り９，６９９÷１４＝４９余り１３より，２と７の公倍数は４９－３５＝１４（個）あり，４９９÷４２＝１１余り３７，６９９÷４２＝１６余り２７より，２と７と３の公倍数は１６－１１＝５（個）あるので，１４－５＝９（個）です。

○$\frac{m}{3}$となる年号が９９９９より大きくなり，ｍが２と５と７の倍数の場合

この場合，$\frac{m}{8}$，$\frac{m}{7}$，$\frac{m}{6}$，$\frac{m}{5}$，$\frac{m}{4}$は既約分数ではないので，$\frac{m}{9}$のみが条件を満たします。$99\frac{2}{3}=\frac{299}{3}$なので，ｍは３００以上４９９以下の３で割りきれない２と５と７の公倍数ですから，３５０，４９０の２個が条件を満たします。

$\frac{m}{3}$が既約分数の場合は$\frac{m}{9}$も既約分数となるので，これ以降はありません。よって，

６７＋３３＋９＋２＝１１１（個）です。