受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

２つの単位分数への分解・４

$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$のように分子が１の分数を単位分数といいます。$\frac{1}{6}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$のように，単位分数を２つの異なる単位分数の和に分解することを考えます。$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$と$\frac{1}{15}+\frac{1}{10}$のように順番を入れかえただけのものは同じ式とします。

（１）

①　$\frac{1}{2024}=\frac{1}{13156}+\frac{1}{2392}$です。$\frac{1}{13156}=\frac{\boxed{\text{イ}}}{2024\times\boxed{\text{ア}}}$，$\frac{1}{2392}=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{2024\times\boxed{\text{ア}}}$

の$\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{ウ}}$にあてはまる最も小さい整数の組を答えなさい。

②　$\frac{1}{2024}=\frac{1}{4140}+\frac{1}{3960}$です。$\frac{1}{4140}=\frac{\boxed{\text{イ}}}{2024\times\boxed{\text{ア}}}$，$\frac{1}{3960}=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{2024\times\boxed{\text{ア}}}$

の$\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{ウ}}$にあてはまる最も小さい整数の組を答えなさい。

③　①，②を通じて，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$の間に成り立つ式を答えなさい。

（２）$\frac{1}{2024}$を２つの異なる単位分数の和に分解する式は，（１）（２）で示した２つもふくめて，全部でいくつありますか。

最難関問題

２つの単位分数への分解・４

（１）①　$\boxed{\text{ア}}$＝１３，$\boxed{\text{イ}}$＝２，$\boxed{\text{ウ}}$＝１１　②　$\boxed{\text{ア}}$＝４５，$\boxed{\text{イ}}$＝２２，$\boxed{\text{ウ}}$＝２３　③$\boxed{\text{ア}}$＝$\boxed{\text{イ}}$＋$\boxed{\text{ウ}}$

（２）３１個

（１）

①　１３１５６と２３９２の最小公倍数は，右の連除法から求めることができます。２０２４＝２×２×２×１１×２３なので，
４×１３×２３×１１×２＝２０２４×１３ですから，$\boxed{\text{ア}}$＝１３です。

$$\begin{array}{r|rr}
4 & 13156 & 2392 \\ \hline
13 & 3289 & 598 \\ \hline
23 & 253 & 46 \\ \hline
 & 11 & 2
\end{array}$$

１３１５６は，（１３１５６と２３９２の最小公倍数）÷２なので，$\boxed{\text{イ}}$＝２，
２３９２は，（１３１５６と２３９２の最小公倍数）÷１１なので，$\boxed{\text{ウ}}$＝１１です。

②　４１４０と３９６０の最小公倍数は，右の連除法から求めることができます。２０２４＝２×２×２×１１×２３なので，
４×９×５×２３×２２＝２０２４×４５ですから，$\boxed{\text{ア}}$＝４５です。

$$\begin{array}{r|rr}
4 & 4140 & 3960 \\ \hline
9 & 1035 & 990 \\ \hline
5 & 115 & 110 \\ \hline
 & 23 & 22
\end{array}$$

４１４０は，（４１４０と３９６０の最小公倍数）÷２２なので，$\boxed{\text{イ}}$＝２２，
３９６０は，（４１４０と３９６０の最小公倍数）÷２３なので，$\boxed{\text{ウ}}$＝２３です。

③　$\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{2024\times\boxed{\text{ア}}}+\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{2024\times\boxed{\text{ア}}}=\dfrac{\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}}}{2024\times\boxed{\text{ア}}}=\dfrac{1}{2024}$なので，$\boxed{\text{ア}}$＝$\boxed{\text{イ}}$＋$\boxed{\text{ウ}}$です。

（２）（１）の$\boxed{\text{イ}}$と$\boxed{\text{ウ}}$は互いに素なので，$\boxed{\text{イ}}$＋$\boxed{\text{ウ}}$である$\boxed{\text{ア}}$も，$\boxed{\text{イ}}$や$\boxed{\text{ウ}}$と互いに素です。さらに，

$\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{2024\times\boxed{\text{ア}}}$も$\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{2024\times\boxed{\text{ア}}}$も約分すると単位分数になるので，$\boxed{\text{イ}}$と$\boxed{\text{ウ}}$は２０２４の約数です。

こうして，$\boxed{\text{イ}}$と$\boxed{\text{ウ}}$が互いに素な２０２４の約数であれば，

$\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{2024\times(\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}})}$も$\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{2024\times(\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}})}$も単位分数であり，

$\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{2024\times(\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}})}+\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{2024\times(\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}})}=\dfrac{\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}}}{2024\times(\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}})}=\dfrac{1}{2024}$が成り立ちます。

最難関問題

$$\square \overline{)\ \ B \qquad C\ \ }$$
$$\qquad \boxed{\text{ウ}} \qquad \boxed{\text{イ}}$$

互いに素

逆に，$\dfrac{1}{2024}=\dfrac{1}{B}+\dfrac{1}{C}$のとき，右の連除法によって求められるＢとＣの最小公倍数をＤとすると，$\dfrac{1}{B}+\dfrac{1}{C}=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{D}+\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{D}$なので，$\dfrac{\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}}}{D}=\dfrac{1}{2024}$であることから，Ｄ＝２０２４×（$\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}}$）です。$\dfrac{1}{2024}=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{2024\times(\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}})}+\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{2024\times(\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}})}$において，$\boxed{\text{イ}}$と$\boxed{\text{ウ}}$が互いに素であることから，$\boxed{\text{イ}}$と$\boxed{\text{ウ}}$は$\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}}$とも互いに素なので，$\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{2024\times(\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}})}$，$\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{2024\times(\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}})}$が約分して単位分数になるのは，$\boxed{\text{イ}}$と$\boxed{\text{ウ}}$が２０２４の約数の場合です。こうして，$\dfrac{1}{2024}=\dfrac{1}{B}+\dfrac{1}{C}$が成り立つときには，それに対応する２０２４の互いに素である約数の組が存在します。

　こうして，２０２４の互いに素な約数の組の数だけ，２つの単位分数への分解が存在します。
２０２４の約数は，
１，２，４，８，１１，２２，２３，４４，４６，８８，９２，１８４，２５３，５０６，１０１２，２０２４の１６個です。この中で互いに素な組みあわせは，

　　１と□…□＝１以外の１５個，　　２と□…□＝１１，２３，２５３の３個，
　　４と□…□＝１１，２３，２５３の３個，　　８と□…□＝１１，２３，２５３の３個，
　　１１と□…□＝２３，４６，９２，１８４の４個，　　２２と□…□＝２３の１個，
　　２３と□…□＝４４，８８の２個，

となるので，和を求めて３１個です。