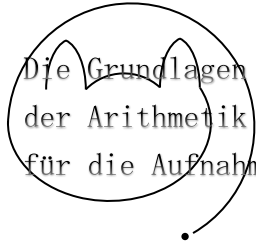


最難関問題

不定方程式

ある町で、1円、2円、4円、8円、16円、32円、64円の記念切手が発行されました。太郎君はこれらの切手をたくさん持っています。

- (1) 1円、2円、4円切手をあわせて64円分にするような枚数の組合せは何通りありますか。使わない切手があってもよいものとします。
- (2) 1円、2円、4円、8円切手をあわせて64円分にするような枚数の組合せは何通りありますか。使わない切手があってもよいものとします。
- (3) 1円、2円、4円、8円、16円、32円、64円切手をあわせて64円分にするような枚数の組合せは何通りありますか。使わない切手があってもよいものとします。



最難関問題

不定方程式 (1) 289通り (2) 969通り (3) 1828通り

(1) 表によって調べ上げ始めると、すぐに規則に気づくことができるでしょう。4円切手と2円切手の合計金額と64円の差は1円切手によって必ず埋めることができるので、1円切手の枚数は考えません。

4円切手(枚)	16	15	14	13	...	1	0
2円切手(枚)	0	2~0	4~0	6~0	...	30~0	32~0
組合せ(通り)	1	3	5	7	...	31	33

よって、 $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 31 + 33 = (1 + 33) \times 17 \div 2 = 17 \times 17 = 289$ (通り) です。

(2) (1) 同様にして、まずは調べ上げてみます。

8円切手(枚)	8	7		
4円切手(枚)	0	2	1	0
2円切手(枚)	0	0	2~0	4~0
組合せ(通り)	1	1	3	5
合計(通り)	1	9		

8円切手(枚)	6				
4円切手(枚)	4	3	2	1	0
2円切手(枚)	0	2~0	4~0	6~0	8~0
組合せ(通り)	1	3	5	7	9
	25				

$1 = 1$, $1 + 3 + 5 = 9$, $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ のように、1から順に連続する奇数を奇数個加えると、奇数の平方数になります。よって、8円切手の枚数を1枚減らすごとに、組み合わせは1つ大きな奇数の平方数になります。

最難関問題

8円切手(枚)	8	7	6	5	4	3	2	1	0
4円切手(枚)	0	2~0	4~0	6~0	8~0	10~0	12~0	14~0	16~0
2円切手(枚)									
合計(通り)	1	9	25	49	81	121	169	225	289

よって、 $1 + 9 + 25 + 49 + 81 + 121 + 169 + 225 + 289 = 969$ (通り) です。

(3) ここまでの流れを踏まえて、16円以下の切手を使う場合、32円以下の切手を使う場合、64円以下の切手を買う場合を順に求めていきます。

16円以下の切手を使う場合

16円切手の枚数は、4枚~0枚です。

○16円切手が4枚の場合

16円×4枚=8円×8枚より、16円切手を4枚使うということは8円切手を8枚使うことと同じです。(2)の表より、このときの合計は1通りですから、1通りです。

○16円切手が3枚の場合

16円×3枚=8円×6枚より、16円切手を3枚使うということは8円切手を6枚使うことと同じです。8円切手をさらに使うことができるので、8円切手の枚数は6枚以上であると考えられるので、(2)の表の8円切手の枚数が8枚、7枚、6枚の場合の合計より、 $1 + 9 + 25 = 35$ (通り) です。

○16円切手が2枚の場合

(2)の表の8円切手の枚数が4枚以上の場合の合計より、 $1 + 9 + 25 + 49 + 81 = 165$ (通り) です。

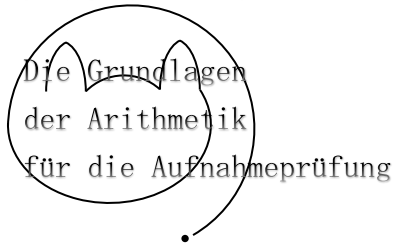
○16円切手が1枚の場合

(2)の表の8円切手の枚数が2枚以上の場合の合計より、 $1 + 9 + 25 + 49 + 81 + 121 + 169 = 455$ (通り) です。

○16円切手が0枚の場合

(2)の表の8円切手の枚数が0枚以上の場合の合計となりますから、(2)の答えの969通りです。

以上より、 $1 + 35 + 165 + 455 + 969 = 1625$ (通り) です。



最難関問題

32円以下の切手を使う場合

32円切手の枚数は、2枚、1枚、0枚のいずれかです。

○32円切手が2枚の場合

32×2=64より明らかに1通りですが、ここまでの流れを踏まえると、次のようになります。

32円×2枚=16円×4枚より、16円切手の枚数が4枚以上の場合の合計なので、1通りです。

○32円切手が1枚の場合

32円×1枚=16円×2枚より、16円切手の枚数が2枚以上の場合の合計なので、

1+35+165=201（通り）です。

○32円切手が0枚の場合

16円以下の切手しか用いないので、上で求めた通り、

1+35+165+455+969=1625（通り）です。

以上より、1+201+1625=1827（通り）です。

64円以下の切手を使う場合

64円切手の枚数は、1枚か0枚です。64円切手を1枚使う場合、他の切手は用いないので明らかに1通りです。0枚の場合は32円以下の切手を使うので、1827通りです。

よって、1+1827=1828（通り）です。