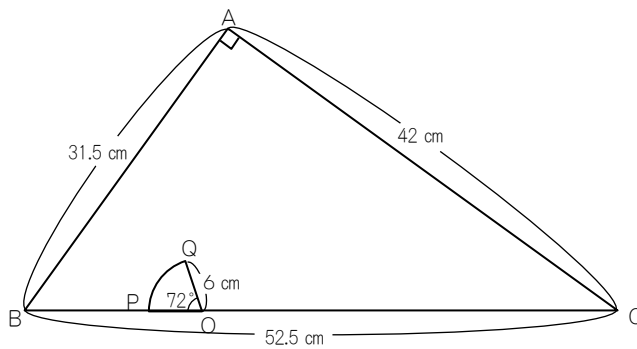


最難関問題

おうぎ形の内部移動・2

直角三角形ABCの内部に、中心角が72度で半径6cmのおうぎ形OPQを、半径OPが辺BCと重なるように下の図の向きに置きます。角Bの大きさは54度、円周率は3.14とします。



- (1) おうぎ形OPQが、向きを変えることなく直角三角形ABCの内部を自由に動くとき、通過できる範囲の面積を求めなさい。
- (2) おうぎ形OPQが、向きを変えることなく直角三角形ABCの内部を辺に沿って動くとき、通過できる範囲の面積を求めなさい。

最難関問題

おうぎ形の内部移動・2 (1) 640.368 cm^2 (2) 534.528 cm^2

(1) 図①の影をつけた部分のみ、おうぎ形OPQは通過することができません。影をつけた3つの部分をあわせると、図②のようにおうぎ形OPQがぴったり入る、三角形ABCと相似な三角形DEFになります。おうぎ形の中心Oから辺DEに垂直な線OGを引き、点QからOGに垂直な線QHを引きます。このとき、○印のついた角の大きさは $90 - 54 = 36$ (度) になります。

直角三角形OEGとOQHはどちらも直角三角形DEFと相似なので、

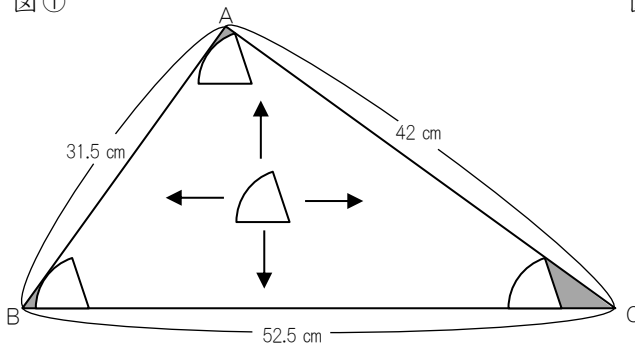
GEの長さは、 $6 \times \frac{3}{4} = 4.5$ (cm)、DG=QHの長さは、 $6 \times \frac{3}{5} = 3.6$ (cm) です。よって、辺DE

の長さは $4.5 + 3.6 = 8.1$ (cm)、辺DFの長さは $8.1 \times \frac{4}{3} = 10.8$ (cm) となるので、三角形DEF

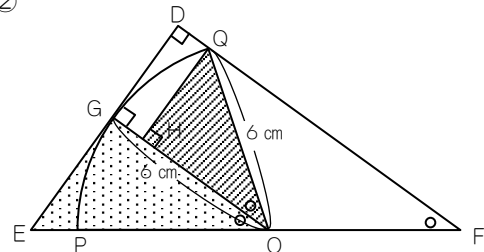
の面積は $8.1 \times 10.8 \times \frac{1}{2} = 43.74$ (cm^2)、図①の影をつけた部分の面積はここからおうぎ形OPQ

の面積を引けばよいので、 $43.74 - 6 \times 6 \times 3.14 \times \frac{72}{360} = 21.132$ (cm^2) です。

図①



図②



以上より、おうぎ形OPQが通過できる範囲の面積は、

$31.5 \times 42 \times \frac{1}{2} - 21.132 = 640.368$ (cm^2) です。

最難関問題

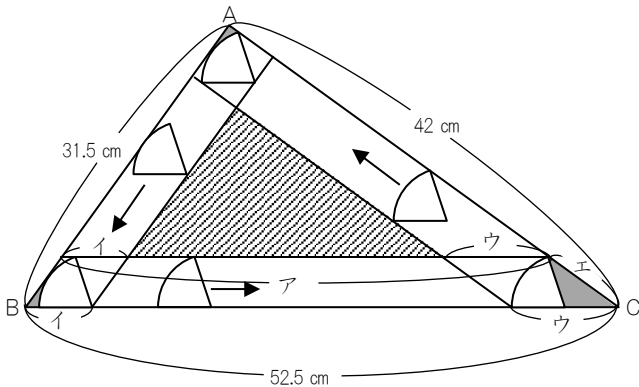
(2) おうぎ形OPQが通過しない部分は、(1)の影をつけた部分に加えて、図③の斜線部分の三角形になります。斜線部分の三角形は3辺とも直角三角形ABCと平行なので、直角三角形ABCと相似です。よって、どれか1つの辺の長さがわかれば、そこから面積を求めることができます。そこで、図③のAからイとウの長さを引いて求めます。

図④において、(1)に引き続いておうぎ形OPQがぴったり入る、三角形ABCと相似な三角形DEFを考えます。○印のついた角の大きさは36度なので、三角形OFQは二等辺三角形ですから、辺OFの長さは6cmです。三角形DEFの辺DFの長さは10.8cmだったので、辺EFの長さは $10.8 \times \frac{5}{4} = 13.5$ (cm) であり、EPの長さは $13.5 - 6 \times 2 = 1.5$ (cm) です。また、直角三

角形OQHに注目すると、辺OHの長さは $6 \times \frac{4}{5} = 4.8$ (cm) なので、GHの長さは $6 - 4.8 = 1.2$ (cm) で、DQの長さも1.2cmです。よって、QFの長さは $10.8 - 1.2 = 9.6$ (cm) です。

図③のイの長さは図④のEOの長さに等しいので、 $1.5 + 6 = 7.5$ (cm)、ウの長さはPFの長さに等しいので、 $6 + 6 = 12$ (cm) です。また、エの長さはQFの長さに等しいので、9.6cmです。エの長さが9.6cmであることから、アの長さは、 $52.5 \times \frac{42 - 9.6}{42} = 40.5$ (cm) と求めることができます。ア - (イ + ウ) = $40.5 - (7.5 + 12) = 21$ (cm) であることから、図③の斜線部分の直角三角形の直角をはさむ2辺の長さは、 $21 \times \frac{3}{5} = 12.6$ (cm) と $21 \times \frac{4}{5} = 16.8$ (cm) であり、その面積は、 $12.6 \times 16.8 \times \frac{1}{2} = 105.84$ (cm²) です。よって、(1)の答えからこれを引いて、 $640.368 - 105.84 = 534.528$ (cm²) です。

図③



図④

