最難関問題

ある数が現れる和の数列

次の規則にしたがって数列を作ります。

①　ある整数を１番目の整数とする。

②　直前の数と同じ数を並べる

③　直前の２つの数の和を並べる

④　以降は，②③③②③③…と操作を繰り返す。

たとえば１番目の整数を１とした場合には，次のようになります。

１，１，２，３，３，６，９，…

以下の問いに答えなさい。

（１）１番目の整数が１のときの，１０番目の数と２０番目の数を答えなさい。

（２）１番目の整数が４のとき，９７２は何番目の数になりますか。

（３）整数３０は，数列の何番目に現れる可能性がありますか。すべて答えなさい。

（４）数列中に現れる順番が１２通り考えられる整数はいくつもあります。その中で，１２００に最も近いもの，２番目に近いもの，３番目に近いものを答えなさい。

最難関問題

ある数が現れる和の数列

（１）２７，７２９　（２）１６番目，１７番目

（３）１番目，２番目，３番目，４番目，５番目，６番目　（４）１１８８，１２１５，１２４２

（１）１，１，２，３，３，６，９，９，１８，２７，２７，５４，…となるので，１０番目は２７です。
数列を１，１，２，３，３，６，９，９，１８，２７，２７，５４，…と区切ると，各周期は，
３×…×３，３×…×３，２×３×…×３となっています。２０番目の数は，２０÷３＝６余り２より，７つ目の周期のうちの２番目の数です。よって，３×３×３×３×３×３＝７２９です。

（２）最初の数が□のとき，数列は
□，□，２×□，３×□，３×□，６×□…３×…×３×□，３×…×３×□，２×３×…×３×□
となります。□＝４のとき，９７２＝３×３×３×３×３×４となるので，６番目の周期中の１，２番目，つまり，１６番目，１７番目です。

（３）最初の数を△とします。
３０＝△の場合，１，２番目です。
３０＝２×△の場合，△＝１５で，３０は３番目です。
３０＝３×△の場合，△＝１０で，３０は４，５番目です。
３０＝２×３×△の場合，△＝５で，３０は６番目です。
△が整数になるのは以上の場合なので，１番目，２番目，３番目，４番目，５番目，６番目です。

（４）現れる順番が１２通り考えられる整数として，偶数の場合と奇数の場合を考えることができます。

偶数

積の形に分解をすると２×３×３×３×□，となり，□には３の倍数以外の数，具体的には，１，２，４，５，７，８，…，が入ります。
１２００の近くでは，５４×２２＝１１８８，５４×２３＝１２４２などがあります。

奇数

積の形に分解をすると３×３×３×３×３×□，となり，□には２および３の倍数以外の数，具体的には，１，５，７，１１，…，が入ります。
１２００の近くでは，２４３×５＝１２１５があります。

以上より，１１８８，１２１５，１２４２です。