



最難関問題

2024の問題・部分分数分解

次の計算を下さい。

$$(1) \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} + \dots + \frac{1}{2024}$$

$$(2) \frac{21}{2024} + \frac{36}{40480} + \frac{51}{627440} + \frac{66}{5076560}$$

最難関問題

2024の問題・部分分数分解 (1) $\frac{11}{46}$ (2) $\frac{27579}{2427920}$

$$\begin{aligned}
 (1) & \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} + \dots + \frac{1}{2024} \\
 &= \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{4 \times 6} + \frac{1}{6 \times 8} + \frac{1}{8 \times 10} + \frac{1}{10 \times 12} + \dots + \frac{1}{44 \times 46} \\
 &= \left(\frac{2}{2 \times 4} + \frac{2}{4 \times 6} + \frac{2}{6 \times 8} + \frac{2}{8 \times 10} + \frac{2}{10 \times 12} + \dots + \frac{2}{44 \times 46} \right) \times \frac{1}{2} \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{46} \right) \times \frac{1}{2} = \frac{22}{46} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{46} \text{ です。}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) & \frac{21}{2024} = \frac{21}{2 \times 4 \times 11 \times 23} = \frac{23-2}{2 \times 4 \times 11 \times 23} = \frac{23}{2 \times 4 \times 11 \times 23} - \frac{2}{2 \times 4 \times 11 \times 23} \\
 &= \frac{1}{2 \times 4 \times 11} - \frac{1}{4 \times 11 \times 23}
 \end{aligned}$$

であることに注目すると、 $40480 \div (4 \times 11 \times 23) = 40$ であることから、

$$\begin{aligned}
 \frac{36}{40480} &= \frac{36}{4 \times 11 \times 23 \times 40} = \frac{40-4}{4 \times 11 \times 23 \times 40} \\
 &= \frac{40}{4 \times 11 \times 23 \times 40} - \frac{4}{4 \times 11 \times 23 \times 40} = \frac{1}{4 \times 11 \times 23} - \frac{1}{11 \times 23 \times 40}
 \end{aligned}$$

となります。2, 4, 11, 23, 40のとなりあう数の差は、2, 7, 12, 17という等差数列なので、2, 4, 11, 23, 40は差が5ずつ大きくなる階差数列です。同様にして、

$$\begin{aligned}
 \frac{51}{627440} &= \frac{62-11}{11 \times 23 \times 40 \times 62} = \frac{1}{11 \times 23 \times 40} - \frac{1}{23 \times 40 \times 62}, \\
 \frac{66}{5076560} &= \frac{89-23}{23 \times 40 \times 62 \times 89} = \frac{1}{23 \times 40 \times 62} - \frac{1}{40 \times 62 \times 89}, \text{ となります。}
 \end{aligned}$$

$$\frac{21}{2024} + \frac{36}{40480} + \frac{51}{627440} + \frac{66}{5076560} = \frac{1}{2 \times 4 \times 11} - \frac{1}{40 \times 62 \times 89},$$

$2 \times 4 \times 11$ と $40 \times 62 \times 89$ の最小公倍数は、 $11 \times 40 \times 62 \times 89$ なので、計算を続けて、

$$\frac{5 \times 62 \times 89 - 11}{11 \times 40 \times 62 \times 89} = \frac{27579}{2427920} \text{ です。}$$