受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

# 最難関問題

２つの単位分数への分解・２

※（１）（２）は「２つの単位分数への分解・１」とまったく同じ問題です

$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$のように分子が１の分数を単位分数といいます。$\frac{1}{6}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$のように，単位分数を２つの異なる単位分数の和に分解することを考えます。$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$と$\frac{1}{15}+\frac{1}{10}$のように順番を入れかえただけのものは同じ式とします。

（１）$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$以外の，$\frac{1}{6}$を２つの異なる単位分数の和に分解する式をすべてかきなさい。

（２）$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$という式を計算すると，$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{3}{30}+\frac{2}{30}=\frac{3+2}{30}=\frac{1}{6}$となります。よって，

$$\frac{1}{6}=\frac{3+2}{30}=\frac{3+2}{6\times(3+2)}=\frac{3}{6\times(3+2)}+\frac{2}{6\times(3+2)}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$$です。

（１）で求めたこれ以外の$\frac{1}{6}$の分解も考えると，$\frac{\square}{6\times(\square+\triangle)}+\frac{\triangle}{6\times(\square+\triangle)}$を約分すると２つの異なる単位分数の和に分解する式になり，６×（□＋△）が２つの単位分数の分母の最小公倍数であるとき，□と△にあてはまる整数にはどのような性質がありますか。簡単に説明しなさい。

（３）$\frac{1}{30}$を２つの異なる単位分数の和に分解する式はいくつありますか。

（４）$\frac{1}{100}$以上の単位分数のうち，２つの異なる単位分数の和に分解する式の個数が（３）と同じになるものを，$\frac{1}{30}$を除いてすべて答えなさい。

# 最難関問題

２つの単位分数への分解・２

（１）$\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$，$\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$，$\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$

（２）（解答例）６の約数で互いに素　（３）１３個　（４）$\frac{1}{42}$，$\frac{1}{48}$，$\frac{1}{66}$，$\frac{1}{70}$，$\frac{1}{78}$，$\frac{1}{80}$

（１）$\frac{1}{6}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}$なので，大きいほうの単位分数は$\frac{1}{11}$以上$\frac{1}{7}$以下，小さいほうの単位分数は$\frac{1}{13}$以下です。

$\frac{1}{6}-\frac{1}{11}$から$\frac{1}{6}-\frac{1}{7}$までを計算すると，答えが単位分数になるのは，

$\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$，$\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{1}{18}$，$\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$，$\frac{1}{6}-\frac{1}{7}=\frac{1}{42}$の４つの場合です。よって，

$\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$，$\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$，$\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$が答えとなります。

（２）まず，$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{3}{30}+\frac{2}{30}$という通分において３０は１０と１５の最小公倍数なので，右の連徐法を考えると，３と２は互いに素です。

５）１０　１５
　　２　　３
　互いに素

　次に，$\frac{3}{6\times(3+2)}=\frac{1}{10}$と$\frac{2}{6\times(3+2)}=\frac{1}{15}$において約分がどのように成り立っているのかを考えます。３と２は互いに素なので，$\frac{3}{3+2}$と$\frac{2}{3+2}$はこれ以上約分ができない既約分数です。よって，約分して単位分数になるのは３と２が６の約数であるためです。

　６の約数は１，２，３，６で，これらのうちで互いに素である組み合わせは（２，１），（３，１），（６，１），（３，２）の４つです。これらを$\frac{\square}{6\times(\square+\triangle)}+\frac{\triangle}{6\times(\square+\triangle)}$の（△，□）にいれると，

$\frac{2}{6\times(2+1)}+\frac{1}{6\times(2+1)}=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$，

$\frac{3}{6\times(3+1)}+\frac{1}{6\times(3+1)}=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$，

$\frac{6}{6\times(6+1)}+\frac{1}{6\times(6+1)}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$，となって（１）で求めた式に対応します。よって，「６の約数であること」「互いに素であること」の２つを含む説明が正解です。

# 最難関問題

以上を一般的に説明すると，次のようになります。

$\frac{1}{\mathrm{A}}=\frac{1}{\mathrm{B}}+\frac{1}{\mathrm{C}}$のとき，右の連除法によって求められるＢとＣの最小公倍数を

$$\begin{array}{r|ll} \square & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ \hline & c & b \end{array}$$

互いに素

Ｄとすると，$\frac{1}{\mathrm{B}}+\frac{1}{\mathrm{C}}=\frac{b}{\mathrm{D}}+\frac{c}{\mathrm{D}}$なので，$\frac{b+c}{\mathrm{D}}=\frac{1}{\mathrm{A}}$であることから，

Ｄ＝Ａ×（ｂ＋ｃ）です。$\frac{1}{\mathrm{A}}=\frac{b}{\mathrm{A}\times(b+c)}+\frac{c}{\mathrm{A}\times(b+c)}$

において，ｂとｃが互いに素であることから，ｂとｃはｂ＋ｃとも互いに素なので，$\frac{b}{b+c}$と$\frac{c}{b+c}$

は既約分数です。よって，$\frac{b}{\mathrm{A}\times(b+c)}$，$\frac{c}{\mathrm{A}\times(b+c)}$が約分して単位分数になるのは，ｂとｃ

がＡの約数の場合です。こうして，$\frac{1}{\mathrm{A}}=\frac{1}{\mathrm{B}}+\frac{1}{\mathrm{C}}$が成り立つときには，それに対応するＡの互いに素である約数の組が存在します。

また逆に，ｂとｃが互いに素であるＡの約数の場合，$\frac{b}{\mathrm{A}\times(b+c)}$と$\frac{c}{\mathrm{A}\times(b+c)}$は約分すると

単位分数になり，その和は$\frac{b}{\mathrm{A}\times(b+c)}+\frac{c}{\mathrm{A}\times(b+c)}=\frac{b+c}{\mathrm{A}\times(b+c)}=\frac{1}{\mathrm{A}}$となります。

よって，分母Ａの単位分数を２個の異なる単位分数の和で表す式と，Ａの互いに素である約数の組は１対１対応をします。

（３）３０を素因数分解すると，２×３×５です。３０の約数のうちで互いに素である組は，
（１，２），（１，３），（１，５），（１，２×３），（１，２×５），（１，３×５），（１，２×３×５），
（２，３），（２，５），（２，３×５），（３，５），（３，２×５），（５，２×３）の１３組です。

よって，$\frac{1}{30}$を２つの異なる単位分数の和に分解する式は１３個あります。

# 最難関問題

（４）分母を素因数分解したときに何種類の素数が現れるかで場合分けをします。

３種類

３０と同じように，３個の異なる素数〇，△，□の積〇×△×□である整数が分母の場合に，互いに素である約数の組は以下の１３組になります。

（１，〇），（１，△），（１，□），（１，〇×△），（１，〇×□），（１，△×□），（１，〇×△×□），
（〇，△），（〇，□），（〇，△×□），（△，□），（△，〇×□），（□，〇×△）

この条件を満たすのは，２×３×７＝４２，２×３×１１＝６６，２×３×１３＝７８，
２×５×７＝７０です。また，４種類以上の場合は，互いに素である約数の組がさらに増えるので，条件を満たしません。

２種類

６と同じように，２個の異なる素数△，□の積△×□である整数が分母の場合は，互いに素である約数の組が４組になります。

△×△×□では，（１，△），（１，□），（１，△×△），（１，△×□,），（１，△×△×□），（△，□），（△×△，□）の７組です。

△×△×□×□では，上の７組に加えて，（１，□×□），（１，△×□×□），（１，△×△×□×□），（△，□×□,），（△×△，□×□）の５組で，７＋５＝１２（組）です。

△×△×△×□×□では，上の１２組に，（１，△×△×△），（１，△×△×△×□×□）などが加わるので，１３組にはなりません。

△×△×△×□では，△×△×□の７組に加えて，（１，△×△×△），（１，△×△×△×□,），（△×△×△，□）の３組で，７＋３＝１０（組）です。

△×△×△×△×□では，△×△×△×□の１０組に加えて，（１，△×△×△×△），
（１，△×△×△×△×□,），（△×△×△×△，□）の３組で，１０＝１３（組）です。この条件を満たすのは，２×２×２×２×３＝４８，２×２×２×２×５＝８０です。

１種類

△×…×△という△１３個の積で１３組になりますが，△＝２の場合でも１３個の積は９１９２となるので，１００以下の分母にはなりません。

以上より，$\frac{1}{42}$，$\frac{1}{48}$，$\frac{1}{66}$，$\frac{1}{70}$，$\frac{1}{78}$，$\frac{1}{80}$の６個が答えとなります。