

最難関問題

2つの単位分数への分解・2

※ (1)(2) は「2つの単位分数への分解・1」とまったく同じ問題です

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ のように分子が1の分数を単位分数といいます。 $\frac{1}{6} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$ のように、単位分数を2つの異なる単位分数の和に分解することを考えます。

$\frac{1}{10} + \frac{1}{15}$ と $\frac{1}{15} + \frac{1}{10}$ のように順番を入れかえただけのものは同じ式とします。

(1) $\frac{1}{10} + \frac{1}{15}$ 以外の、 $\frac{1}{6}$ を2つの異なる単位分数の和に分解する式をすべてかきなさい。

(2) $\frac{1}{10} + \frac{1}{15}$ という式を計算すると、 $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{3}{30} + \frac{2}{30} = \frac{3+2}{30} = \frac{1}{6}$ となります。よって、

$$\frac{1}{6} = \frac{3+2}{30} = \frac{3+2}{6 \times (3+2)} = \frac{3}{6 \times (3+2)} + \frac{2}{6 \times (3+2)} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} \text{ です。}$$

(1) で求めたこれ以外の $\frac{1}{6}$ の分解も考えると、 $\frac{\square}{6 \times (\square + \Delta)} + \frac{\Delta}{6 \times (\square + \Delta)}$ を約分すると2つの異なる単位分数の和に分解する式になり、 $6 \times (\square + \Delta)$ が2つの単位分数の分母の最小公倍数であるとき、 \square と Δ にあてはまる整数にはどのような性質がありますか。簡単に説明しなさい。

(3) $\frac{1}{30}$ を2つの異なる単位分数の和に分解する式はいくつありますか。

(4) $\frac{1}{100}$ 以上の単位分数のうち、2つの異なる単位分数の和に分解する式の個数が(3)と同じになるものを、 $\frac{1}{30}$ を除いてすべて答えなさい。



最難関問題

2つの単位分数への分解・2

(1) $\frac{1}{9} + \frac{1}{18}, \frac{1}{8} + \frac{1}{24}, \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$

(2) (解答例) 6の約数で互いに素 (3) 13個 (4) $\frac{1}{42}, \frac{1}{48}, \frac{1}{66}, \frac{1}{70}, \frac{1}{78}, \frac{1}{80}$

(1) $\frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$ なので、大きいほうの単位分数は $\frac{1}{11}$ 以上 $\frac{1}{7}$ 以下、小さいほうの単位分数は $\frac{1}{13}$ 以下です。

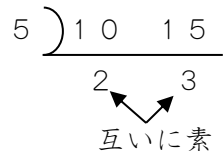
$\frac{1}{6} - \frac{1}{11}$ から $\frac{1}{6} - \frac{1}{7}$ までを計算すると、答えが単位分数になるのは、

$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}, \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}, \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}, \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$ の4つの場合です。よって、

$\frac{1}{9} + \frac{1}{18}, \frac{1}{8} + \frac{1}{24}, \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$ が答えとなります。

(2) まず、 $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{3}{30} + \frac{2}{30}$ という通分において30は10と15の

最小公倍数なので、右の連除法を考えると、3と2は互いに素です。



次に、 $\frac{3}{6 \times (3+2)} = \frac{1}{10}$ と $\frac{2}{6 \times (3+2)} = \frac{1}{15}$ において約分が

どのように成り立っているのかを考えます。3と2は互いに素なので、 $\frac{3}{3+2}$ と $\frac{2}{3+2}$ はこれ以上約分ができない既約分数です。よって、約分して単位分数になるのは3と2が6の約数であるためです。

6の約数は1, 2, 3, 6で、これらのうちで互いに素である組み合わせは(2, 1), (3, 1),

(6, 1), (3, 2)の4つです。これらを $\frac{\square}{6 \times (\square + \Delta)} + \frac{\Delta}{6 \times (\square + \Delta)}$ の(Δ, □)にいと、

$\frac{2}{6 \times (2+1)} + \frac{1}{6 \times (2+1)} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18},$

$\frac{3}{6 \times (3+1)} + \frac{1}{6 \times (3+1)} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24},$

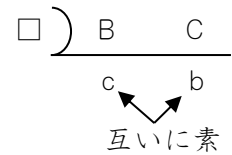
$\frac{6}{6 \times (6+1)} + \frac{1}{6 \times (6+1)} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42},$ となって(1)で求めた式に対応します。よって、

「6の約数であること」「互いに素であること」の2つを含む説明が正解です。

最難関問題

以上を一般的に説明すると、次のようになります。

$\frac{1}{A} = \frac{1}{B} + \frac{1}{C}$ のとき、右の連徐法によって求められる B と C の最小公倍数を



D とすると、 $\frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{b}{D} + \frac{c}{D}$ なので、 $\frac{b+c}{D} = \frac{1}{A}$ であることから、

D = A × (b + c) です。 $\frac{1}{A} = \frac{b}{A \times (b+c)} + \frac{c}{A \times (b+c)}$

において、b と c が互いに素であることから、b と c は b + c とともに互いに素なので、 $\frac{b}{b+c}$ と $\frac{c}{b+c}$

は既約分数です。よって、 $\frac{b}{A \times (b+c)}$ 、 $\frac{c}{A \times (b+c)}$ が約分して単位分数になるのは、b と c

が A の約数の場合です。こうして、 $\frac{1}{A} = \frac{1}{B} + \frac{1}{C}$ が成り立つときには、それに対応する A の互いに素である約数の組が存在します。

また逆に、b と c が互いに素である A の約数の場合、 $\frac{b}{A \times (b+c)}$ と $\frac{c}{A \times (b+c)}$ は約分すると

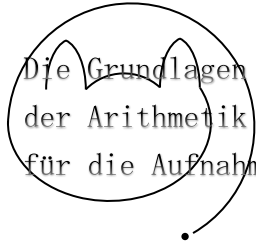
単位分数になり、その和は $\frac{b}{A \times (b+c)} + \frac{c}{A \times (b+c)} = \frac{b+c}{A \times (b+c)} = \frac{1}{A}$ となります。

よって、分母 A の単位分数を 2 個の異なる単位分数の和で表す式と、A の互いに素である約数の組は 1 対 1 対応をします。

(3) 30 を素因数分解すると、 $2 \times 3 \times 5$ です。30 の約数のうちで互いに素である組は、

(1, 2), (1, 3), (1, 5), (1, 2 × 3), (1, 2 × 5), (1, 3 × 5), (1, 2 × 3 × 5),
(2, 3), (2, 5), (2, 3 × 5), (3, 5), (3, 2 × 5), (5, 2 × 3) の 13 組です。

よって、 $\frac{1}{30}$ を 2 つの異なる単位分数の和に分解する式は 13 個あります。



最難関問題

(4) 分母を素因数分解したときに何種類の素数が現れるかで場合分けをします。

3種類

30と同じように、3個の異なる素数 \circ , Δ , \square の積 $\circ \times \Delta \times \square$ である整数が分母の場合に、互いに素である約数の組は以下の13組になります。

(1, \circ), (1, Δ), (1, \square), (1, $\circ \times \Delta$), (1, $\circ \times \square$), (1, $\Delta \times \square$), (1, $\circ \times \Delta \times \square$),
 (\circ , Δ), (\circ , \square), (\circ , $\Delta \times \square$), (Δ , \square), (Δ , $\circ \times \square$), (\square , $\circ \times \Delta$)

この条件を満たすのは、 $2 \times 3 \times 7 = 42$, $2 \times 3 \times 11 = 66$, $2 \times 3 \times 13 = 78$,
 $2 \times 5 \times 7 = 70$ です。また、4種類以上の場合は、互いに素である約数の組がさらに増えるので、条件を満たしません。

2種類

6と同じように、2個の異なる素数 Δ , \square の積 $\Delta \times \square$ である整数が分母の場合は、互いに素である約数の組が4組になります。

$\Delta \times \Delta \times \square$ では、(1, Δ), (1, \square), (1, $\Delta \times \Delta$), (1, $\Delta \times \square$), (1, $\Delta \times \Delta \times \square$), (Δ , \square),
 ($\Delta \times \Delta$, \square)の7組です。

$\Delta \times \Delta \times \square \times \square$ では、上の7組に加えて、(1, $\square \times \square$), (1, $\Delta \times \square \times \square$), (1, $\Delta \times \Delta \times \square \times \square$),
 (Δ , $\square \times \square$), ($\Delta \times \Delta$, $\square \times \square$)の5組で、 $7 + 5 = 12$ (組)です。

$\Delta \times \Delta \times \Delta \times \square \times \square$ では、上の12組に、(1, $\Delta \times \Delta \times \Delta$), (1, $\Delta \times \Delta \times \Delta \times \square \times \square$)などが加わるので、13組にはなりません。

$\Delta \times \Delta \times \Delta \times \square$ では、 $\Delta \times \Delta \times \square$ の7組に加えて、(1, $\Delta \times \Delta \times \Delta$), (1, $\Delta \times \Delta \times \Delta \times \square$),
 ($\Delta \times \Delta \times \Delta$, \square)の3組で、 $7 + 3 = 10$ (組)です。

$\Delta \times \Delta \times \Delta \times \Delta \times \square$ では、 $\Delta \times \Delta \times \Delta \times \square$ の10組に加えて、(1, $\Delta \times \Delta \times \Delta \times \Delta$),
 (1, $\Delta \times \Delta \times \Delta \times \Delta \times \square$), ($\Delta \times \Delta \times \Delta \times \Delta$, \square)の3組で、 $10 + 3 = 13$ (組)です。この条件を満たすのは、 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 48$, $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 80$ です。

1種類

$\Delta \times \dots \times \Delta$ という Δ 13個の積で13組になりますが、 $\Delta = 2$ の場合でも13個の積は9192となるので、100以下の分母にはなりません。

以上より、 $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{48}$, $\frac{1}{66}$, $\frac{1}{70}$, $\frac{1}{78}$, $\frac{1}{80}$ の6個が答えとなります。