受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

１…１×と１…１

１×１＝１，１１×１１＝１２１，１１１×１１１＝１２３２１のように，各位の数がすべて１である同じ整数を２個かけあわせます。

（１）次の式を計算しなさい。

$$\underbrace{1\cdots1}_{10\text{個}} \times \underbrace{1\cdots1}_{10\text{個}}$$

（２）次の式を計算した答えに，０～９はそれぞれ何個現れますか。

$$\underbrace{1\cdots1}_{100\text{個}} \times \underbrace{1\cdots1}_{100\text{個}}$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
個	個	個	個	個	個	個	個	個	個

（３）次の式を計算した答えに，８が１６個現れました。〇にあてはまる整数として考えられるものをすべて答えなさい。

$$\underbrace{1\cdots1}_{〇\text{個}} \times \underbrace{1\cdots1}_{〇\text{個}}$$

最難関問題

１…１×と１…１

（１）１２３４５６７９００９８７６５４３２１

（２）

０	１	２	３	４	５	６	７	８	９
22 個	12 個	22 個	22 個	22 個	22 個	22 個	22 個	11 個	22 個

（３）１３６，１４３，１４５，１４６，１４７，１４８，１４９，１５０，１５１

（１）ひっ算を書くと，図①のようになり，位ごとの数の和は１から１０までとなります。繰り上がりを考えると，式を計算した答えは１２３４５６７９００９８７６５４３２１です。

図①

```
                    1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
  ×                 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
  ---------------------------------------
                    1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                  1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
              1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
            1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
          1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
        1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
      1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
    1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
  1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
  - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
  1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1     位ごとの和
  ---------------------------------------
  1 2 3 4 5 6 7 9 0 0 9 8 7 6 5 4 3 2 1  答え
```

（２）位ごとの和は，１の位から順に１ずつ大きくなっていきます。下２０桁までを計算すると，図②のようになります。ここからは，一の位は１で，それ以降は$\boxed{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot0}$のくり返しになりそうです。

図②

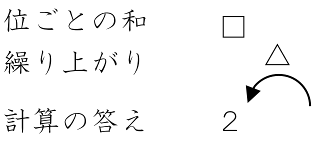
位ごとの和	… 20・19・18・17・16 ・15・14・13・12・11・10・９・８ ・７・６・５・４・３・２・１
計算の答え	… ２・$\boxed{0\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}$・$\boxed{0\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}$・１

「なりそうだ」で（２）は解くこともできるのですが，ここは仕組みをしっかりと考えておきましょう。

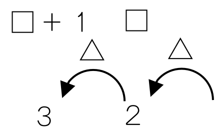
最難関問題

図③のように，ある位での位ごとの和が□，繰り上がってくる数を△，計算の答え，つまりは□＋△の一の位を２とします。図④のように，１つ上の位では位ごとの和は□＋１，繰り上がりは△となるので，（□＋１）＋△＝□＋△＋１の一の位は３となります。

図③

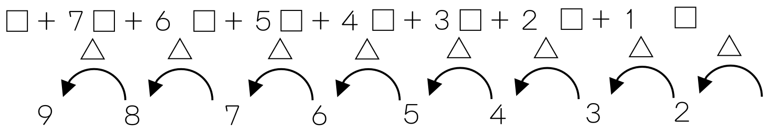


図④



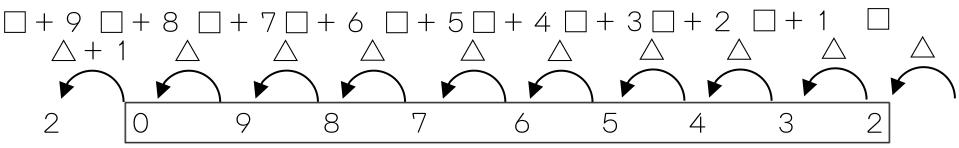
以降も同様となるので，計算の答えが９となる位までは，図⑤のようになります。

図⑤



（□＋７）＋△＝□＋△＋７の一の位が９であることから，図⑥のように
（□＋８）＋△＝□＋△＋８の一の位は０となり，次の位への繰り上がりは１大きくなって△＋１となります。よって，（□＋９）＋（△＋１）＝□＋△＋１０の一の位は２となります。

図⑥



こうして，位ごとの和が大きくなっていく区間では，計算の答えは
２・３・４・５・６・７・８・９・０のくり返しとなります。

最難関問題

さて，（２）では $\underbrace{1\cdots1}_{100\text{個}}$ × $\underbrace{1\cdots1}_{100\text{個}}$ という１００桁の整数どうしをかけているので，全体は図⑦のように１９９桁の整数になります。

図⑦

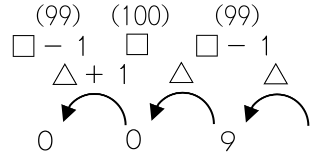
$$
\begin{array}{rr}
 & \overbrace{1\cdots\cdots\cdots\cdots1}^{100\text{個}} \\
\times & 1\cdots\cdots\cdots\cdots1 \\
\hline
 & 1\cdots\cdots\cdots\cdots1 \\
 & 1\cdots\cdots\cdots\cdots1 \\
 & \cdots \\
 & 1\cdots\cdots\cdots\cdots1 \\
 & 1\cdots\cdots\cdots\cdots1 \\
\hdashline
 & 1\ 2\cdots\cdots99\ 100\ 99\cdots\cdots2\ 1 \\
\hline
 & \underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots2\ 1}_{199\text{個}}
\end{array}
$$

位ごとの和
答え

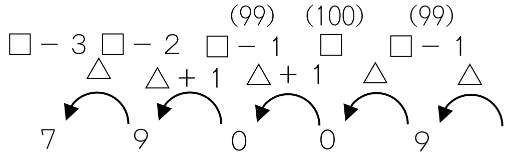
よって，位ごとの和が大きくなっていく区間，つまりは下１００桁において，$\boxed{２・３・４・５・６・７・８・９・０}$は（１００－１）÷９＝１１（回）繰り返されます。ここまでで，１は１個，２～０は１１個ずつ現れます。

次に，位ごとの和が小さくなっていく区間を考えます。下から９９，１００，１０１番目の位は，図⑧のようになります。（□－１）＋△＝□＋△－１の一の位が９，□＋△の一の位は０で，繰り上がりの数が次は１つ大きくなるので，（□－１）＋（△＋１）＝□＋△の一の位も０となります。もう１つ上の位では，図⑨のように（□－２）＋（△＋１）＝□＋△－１の一の位を求めて９となり，その次の位では繰り上がりが１つ小さくなるので，（□－３）＋△＝□＋△－３の一の位は７となります。

図⑧



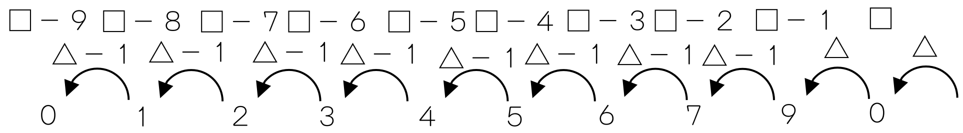
図⑨



最難関問題

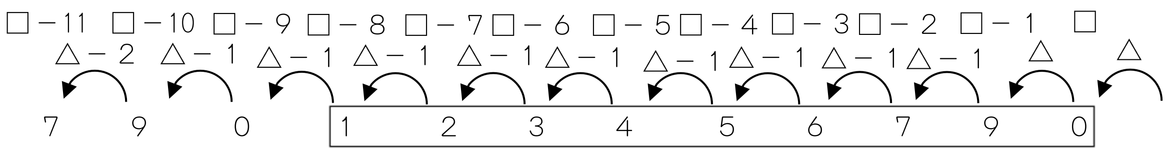
下から１０１番目の位の０から始めて，０，９，７，…の続きを考えると，次のようになります。

図⑩



（□－９）＋（△－１）＝□＋△－１０の一の位が０であることから，図⑪のように（□－１０）＋（△－１）＝□＋△－１１の一の位は９となり，次の位への繰り上がりは１小さくなって△－２となります。よって，（□－１１）＋（△－２）＝□＋△－１３の一の位は７となります。

図⑪



こうして，位ごとの和が小さくなっていく区間では，計算の答えは

$\boxed{０・９・７・６・５・４・３・２・１}$のくり返しとなります。これが，１０１番目の位から，１９９番目の位まで続くので，９９÷９＝１１（回）のくり返しとなります。よって，０～７と９が１１個ずつ現れます。

以上より，０と２～７と９は１１×２＝２２（個），１は１＋１１＝１２（個），８は１１個現れます。以上の数字の個数の合計は，２２×８＋１２＋１１＝１９９となるので，答えが１９９桁の整数であることと一致します。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
22 個	12 個	22 個	22 個	22 個	22 個	22 個	22 個	11 個	22 個

最難関問題

（３）（２）より，一般に $\underbrace{1\cdots1}_{\text{○個}} \times \underbrace{1\cdots1}_{\text{○個}}$ の答えは，図⑫の形になります。

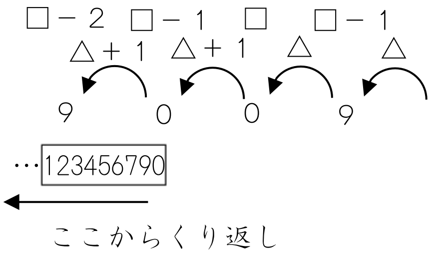
図⑫

$\underbrace{\boxed{123456790}\ \boxed{123456790}\cdots\boxed{123456790}}_{\text{和が小さくなる区間}}$（中間部分）$\underbrace{\boxed{098765432}\cdots\boxed{098765432}\ \boxed{098765432}\ 1}_{\text{和が大きくなる区間}}$

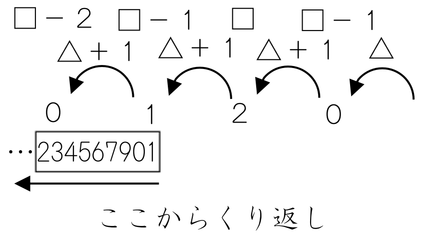
（２）では和が最大となる位（和が１００となる位）が，ちょうど和が大きくなる区間の周期の最後の数である０にあたっていたので，中間部分が「ない」状況になりましたが，それ以外の場合も考える必要があります。

位の数の最大の和を□とすると，（２）で考えたその位の計算した答えが０の場合，図⑬のようになりました。和が大きくなる区間の周期によって，□の位の答えが１になることはありません。□の位の和が２の場合は図⑭のようになります。

図⑬

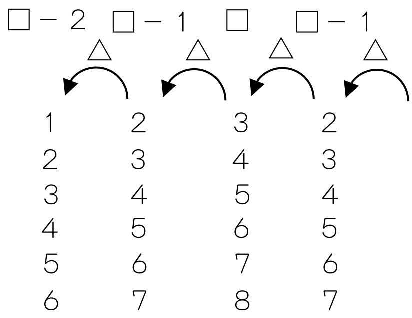


図⑭



□の位の答えが３～８の場合は図⑮のようになります

図⑮

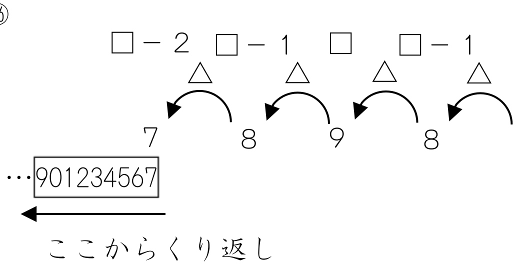


図⑬，⑭，⑮の場合，いずれも和が小さくなる区間の周期に入っていくので，ここから先で上の位に８が現れることはありません。

最難関問題

□の位の答えが９の場合は，図⑯のようになって，□の位より上の位に８が１個現れます。

図⑯



以上より，次のようになります。

□の位の答えが０，２～８の場合，８は和が大きくなる区間に１６個現れます。よって，□の位は図⑰で星をつけた位のいずれかとなります。

図⑰

☆☆☆☆☆☆ ☆　☆

$７６５４３２\underbrace{\boxed{０９８７６５４３２}\cdots\boxed{098765432}\ \boxed{098765432}\ 1}_{16回}$

よって，□の位は１＋９×１６－２＝１４３（番目）か，１＋９×１６＝１４５（番目）から，１４５＋６＝１５１（番目）なので，

○＝１４３，１４５，１４６，１４７，１４８，１４９，１５０，１５１です。

□の位の答えが９の場合は図⑱のようになるので，□の位は１＋９×１５＝１３６（番目）なので，○＝１３６です。

図⑱

☆

$8\ \underbrace{\boxed{９８７６５４３２}\cdots\boxed{098765432}\ \boxed{098765432}\ 1}_{15回}$