



最難関問題

2020の問題・9



たてと横の長さがcmの単位で偶数である長方形の枠に、順にデジタル数字の2と0をしきつめます。はそれぞれの線の長さが1cm、はたての長さが2cm、横の長さが1cmです。例えば、たて横4cmの長方形（正方形）の枠にしきつめると、図1のようになります。

図1

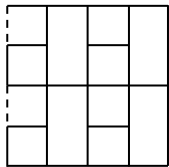


図2

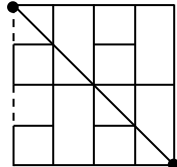
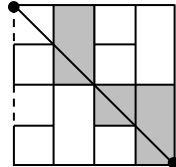


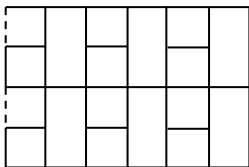
図3



次に、長方形の左上の頂点と右下の頂点を結ぶ対角線をかくと、図2のようになります。このとき、対角線は2と0の線によってできた長方形や正方形を図3のように3個通過します。また、対角線が横切った長方形と正方形の面積の和は、 5 cm^2 になります。次の問いに答えなさい。

- (1) 図4のようにたて4cm、横6cmの長方形の枠にしきつめると、長方形の左上の頂点と右下の頂点を結ぶ対角線は2と0の線によってできた長方形や正方形を何個通過しますか。

図4



- (2) たて26cm、横34cmの長方形の枠にしきつめると、長方形の左上の頂点と右下の頂点を結ぶ対角線は2と0の線によってできた長方形や正方形を何個通過しますか。また、対角線が横切った長方形と正方形の面積の和は、何 cm^2 になりますか。

最難関問題

2020の問題・9 (1) 6個 (2) 51個, 74 cm²

(1) 対角線の代わりにレーザー光線が1秒間で左上の頂点から右下の頂点まで届くと考えます。たての線

は1cmごとに長方形を6区間に分けるので、レーザー光線は図5のように、 $\frac{1}{6}$ 秒ごとにたての線を横切ります。また、横の線は途切れ途切れではありますが、図6のように、1cmごとに長方形を4区間に分けます。よって、 $\frac{1}{4}$ 秒ごとに、横の線を横切るかどうかを確認します。まず、 $\frac{2}{4}$ 秒後は横の線が途切れていないので、必ず横切ります。ただし、後で確認するように、たての線も同時に横切っています。

$\frac{1}{4}$ 秒後と $\frac{3}{4}$ 秒後については、横の線が途切れ途切れになっています。横の線が引いてある条件は、0

~ $\frac{1}{6}$ 秒後, $\frac{2}{6}$ ~ $\frac{3}{6}$ 秒後, $\frac{4}{6}$ ~ $\frac{5}{6}$ 秒後です。

$\frac{1}{6} < \frac{1}{4} < \frac{2}{6}$ より、 $\frac{1}{4}$ 秒後は横の線を横切らず、 $\frac{4}{6} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6}$ より、 $\frac{3}{4}$ 秒後は横の線を横切るなので、横の線はあわせて1 + 1 = 2 (回) 横切ります。

よって、たて・横の線を横切るのは、5 + 2 = 7 (回) から、重複する $\frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ 秒後の1回を引いて、7 - 1 = 6 (回) です。たて・横の線を横切るごとに長方形か正方形を横切るなので、図7のように通過する長方形・正方形は、6個です。

図5

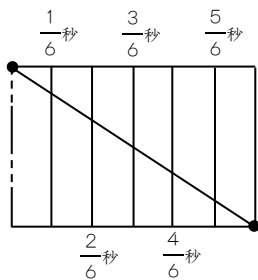


図6

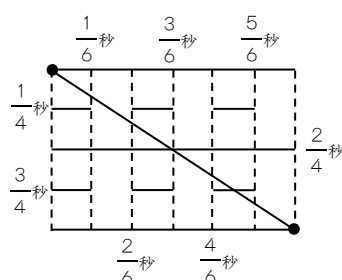
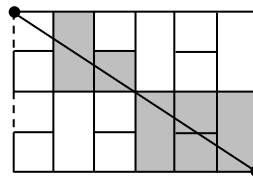


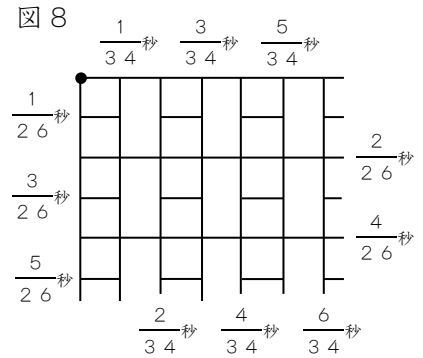
図7





最難関問題

(2) (1)と同様に対角線のかわりに左上の頂点から右下の頂点まで1秒で届くレーザー光線で考えると、時間は図8のようになります。



① たての線は $\frac{1}{34}$ 秒ごとに横切るの、横切る回数は33回です。

② 横の線のうち途切れていないタイプのものは、 \square を2以上24以下の偶数として、 $\frac{\square}{26}$ 秒後に横切ります。よって、横切る回数は12回です。

③ 横の線のうち途切れているタイプのものは、 \triangle を1以上25以下の奇数として、 $\frac{\triangle}{26}$ 秒後に横切り

ます。34と26で分母を通分すると、

$$\frac{\triangle}{26} = \frac{17}{442}, \frac{51}{442}, \frac{85}{442}, \frac{119}{442}, \frac{153}{442}, \frac{187}{442}, \frac{221}{442}, \frac{255}{442}, \frac{289}{442}, \frac{323}{442}, \frac{357}{442}, \frac{391}{442}, \frac{425}{442}$$

です。これ等のうちで、実際に横の線を横切るものはどれかを考えます。

まず、 $\frac{221}{442} = \frac{1}{2}$ 秒後は、たての線の通過と重複するので、除きます。

横の線が引いてあるのは、 $0 \sim \frac{1}{34}$ 秒後、 $\frac{2}{34} \sim \frac{3}{34}$ 秒後、 \dots 、 $\frac{32}{34} \sim \frac{33}{34}$ 秒後です。34と

26で分母を通分すると、 $\frac{0}{442} \sim \frac{13}{442}$ 秒後、 $\frac{26}{442} \sim \frac{39}{442}$ 秒後、 \dots 、ですから、分子の17, 51, 85, \dots 、を13で割って整数の範囲で商を求めたときに、商が0を含めた偶数であれば、実際に横の線を横切ることとなります。この条件を満たすのは、85, 187, 289, 323, 391, 425の6回です。

①~③より、 $33 + 12 + 6 = 51$ (回) ですから、長方形や正方形を51個通過します。

最難関問題

次に、通過する四角形の面積について考えます。

① たての線を横切る場合、長方形、正方形、長方形、正方形、と交互に四角形を通過するので、面積の和は、 $2 \times 17 + 1 \times 16 = 50$ (cm²) です。

② □を2以上24以下の偶数として、 $\frac{\square}{26}$ 秒後に横の線を横切る場合、 $\frac{\square}{26} =$

$$\frac{34}{442}, \frac{68}{442}, \frac{102}{442}, \frac{136}{442}, \frac{170}{442}, \frac{204}{442}, \frac{238}{442}, \frac{272}{442}, \frac{306}{442}, \frac{340}{442}, \frac{374}{442}, \frac{408}{442}$$

のそれぞれについて考えます。上で考えた、 $0 \sim \frac{1}{34}$ 秒後、 $\frac{2}{34} \sim \frac{3}{34}$ 秒後、 \dots 、 $\frac{32}{34} \sim \frac{33}{34}$ 秒後

は、たてに正方形が並んでいる部分を通過するので、分子の34, 68, 102, \dots , を13で割って整数の範囲で商を求めたときに、商が0を含めた偶数であれば、正方形を通過することになります。この条件を満たすのは、34, 136, 238, 272, 340, 374の6回です。残りの6回については、長方形を横切るので、面積の和は、 $(1+2) \times 6 = 18$ (cm²) です。

③ △を1以上25以下の奇数として、 $\frac{\triangle}{26}$ 秒後に横の線を横切る場合は、必ず正方形を通過するので、面積の和は、 $1 \times 6 = 6$ (cm²) です。

①～③より、通過する四角形の面積の和は、 $50 + 18 + 6 = 74$ (cm²) です。