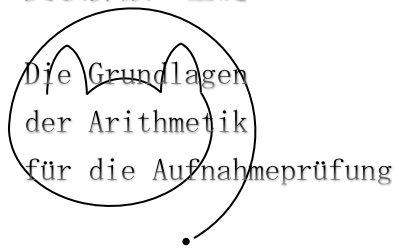


受験算数の基礎



最難関問題

階差数列と剰余

数列 $2, 4, 11, 23, 40, 62, 89, 121, \dots$ において, 2024 で割り切れる最小の数は, 左から何番目に並んでいますか。

最難関問題

階差数列と剰余 58 番目

問題の本筋とは関係ありませんが、 $2 \times 4 \times 11 \times 23 = 2024$ です。

数列 $2, 4, 11, 23, 40, 62, 89, 121, \dots$ は、となりあう数の差が $2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, \dots$ という等差数列である、階差数列です。 $2024 = 2 \times 2 \times 2 \times 11 \times 23$ であることから、この数列の中で $8, 11, 23$ で割り切れる数を探します。

この数列の数を 8 で割った余りは、

1 番目…2, 2 番目…4,

3 番目… $4 + 7 = 11$, $11 \div 8 = 1$ 余り 3,

4 番目… 7 の次の差の 12 について、 $12 \div 8 = 1$ 余り 4 なので、 $3 + 4 = \underline{7}$,

5 番目… 4 の次の差は、 $(4 + 5) \div 8 = 1$ 余り 1 なので、 $7 + 1 = \underline{0}$,

6 番目… 1 の次の差は、 $(1 + 5) \div 8 = 0$ 余り 6 なので、 $0 + 6 = \underline{6}$,

7 番目… 6 の次の差は、 $(6 + 5) \div 8 = 1$ 余り 3 なので、 $(6 + 3) \div 8 = 1$ 余り 1,

というように調べていくと、 $\boxed{2, 4, 3, 7, 0, 6, 1, 1, 6, 0, 7, 3, 4, 2, 5, 5}$ の 16 個の数のくり返しになり、余りが 0 になるのは $(16$ の倍数 $+ 5, 10)$ 番目です。

11 で割った余りは、 $\boxed{2, 4, 0, 1, 7, 7, 1, 0, 4, 2, 5}$ の 11 個の数のくり返しになり、余りが 0 になるのは $(11$ の倍数 $+ 3, 8)$ 番目です。

23 で割った余りは、 $\boxed{2, 4, 11, 0, 17, 16, 20, 6, 20, 16, 17, 0, 11, 4, 2, 5, 13, 3, 21, 21, 3, 13, 5}$ の 23 個の数のくり返しになり、余りが 0 になるのは $(23$ の倍数 $+ 4, 12)$ 番目です。

$(23$ の倍数 $+ 4, 12)$ は、 $4, 12, 27, 35, 50, 58, 73, 81, \dots$ ですが、 58 は $(16$ の倍数 $+ 10)$ であり、 $(11$ の倍数 $+ 3)$ なので、 58 番目です。