受験算数の基礎

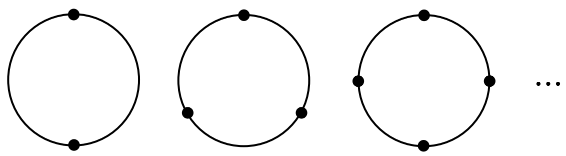
Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

円の等分割と重なり（最難関）

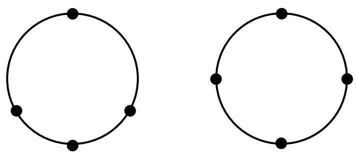
下の図のように，円周上に等間隔に２個，３個，４個，…と点を打った円＜２＞，＜３＞，＜４＞，…が１つずつあります。

＜２＞　＜３＞　＜４＞　…



つぎに，これらの円をいくつか重ねます。そのとき，少なくとも１個は点が重なるようにします。例えば，＜２＞と＜３＞を重ねると，下の＜２，３＞のようになって点が４個見え，＜２＞と＜４＞を重ねても，下の＜２，４＞のようになって点が４個見えます。重ねる順番は考えません。

＜２，３＞　＜２，４＞



（１）点が６個見えるのは，円をどのように重ねたときですか。＜２，３＞，＜２，４＞のようにして答えなさい。

（２）点が８個見えるような円の重ね方は何通りありますか。

（３）点が１２個見えるような円の重ね方は何通りありますか。

最難関問題

円の等分割と重なり（最難関）

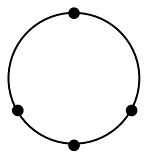
（１）＜２，３，４＞，＜２，３，６＞，＜２，５＞，＜２，６＞，＜３，６＞，＜３，４＞

（２）１１通り　（３）５５通り

　この種の円や直線（線分）を等分割する問題は，分数列の重複で考えます。

例えば２分割した場合は$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{2}$の位置に，３分割した場合は$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{3}$の位置に，４分割したときは$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{4}$の位置に点を打つと考えます。このとき，約分可能な分数は，$\frac{4}{4}=\frac{3}{3}=\frac{2}{2}$，$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$のように，より分母が小さい分数と一致します。

（１）分数列の考えを用いると，例にある＜２，３＞，＜２，４＞は次のように考えられます。



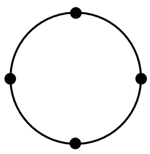
＜２，３＞

分母が２…$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{2}$

分母が３…$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{3}$

$\frac{2}{2}=\frac{3}{3}$なので，４個見える

＜２，４＞



分母が２…$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{2}$

分母が４…$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{4}$

$\frac{2}{2}=\frac{4}{4}$，$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$なので，４個見える

　（１）では点が６個見えるということから，＜６＞，つまりは分母が６の分数列から順に考えていきます。

＜６＞を重ねたとき

　分母が６の１以下の分数は$\frac{1}{6}$，$\frac{2}{6}$，$\frac{3}{6}$，$\frac{4}{6}$，$\frac{5}{6}$，$\frac{6}{6}$の６個です。この分数列と完全に重複するのは，分母が６の約数である２か３の分数列$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{2}$と$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{3}$ですから，

＜２，３，６＞，＜２，６＞，＜３，６＞が条件を満たします。

最難関問題

＜５＞を重ねたとき

分母が５の１以下の分数は$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}$，$\frac{5}{5}$の５個です。５は素数ですから，５より小さい整数２，３，４と互いに素であるため，分母が２の分数列と重ねると$\frac{1}{2}$の１個，分母が３の分数列と重ねると$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$の２個，分母が４の分数列と重ねると$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$の３個の点が増えるので，＜２，５＞が条件を満たします。

＜４＞を重ねたとき

分母が４の１以下の分数は$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{4}$の４個です。２は４の約数ですから，分母が２の分数列$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{2}$を重ねても点の数は増えません。３は４と互いに素なので，分母が３の分数列と重ねると２個の点が増えます。よって，＜３，４＞，＜２，３，４＞が条件を満たします。

分母が３以下の分数は全て並べても＜２，３＞のときの点が４個ですから，これ以降に条件を満たすものはありません。

（２）分母が８の分数列から順に考えていきます。

＜８＞を重ねたとき

分母が８の１以下の分数は$\frac{1}{8}$～$\frac{8}{8}$の８個です。この分数列と完全に重複するのは，分母が８の約数である２か４の分数列ですから，＜２，４，８＞，＜２，８＞，＜４，８＞の３通りが条件を満たします。

＜７＞を重ねたとき

分母が７の１以下の分数は$\frac{1}{7}$～$\frac{7}{7}$の７個です。７は素数ですから，分母が７以下の分数列とは$\frac{7}{7}$でしか重複しません。よって，点が１個増えるのは分母が２の分数列と重ねたときだけですから，＜２，７＞の１通りが条件を満たします。

最難関問題

＜６＞を重ねたとき

分母が６の１以下の分数は$\frac{1}{6}$〜$\frac{6}{6}$の６個です。１より大きく５以下の整数は，次の３種類に分けることができます。

○　６の約数…２と３で，分母が２か３の分数列と重ねても点は増えません。

○　６の互いに素…５で，点は５－１＝４（個）増えます。

○　６の約数ではないが,互いに素でもない…４で,６と４の最大公約数である２が分母の分数$\frac{1}{2}$,$\frac{2}{2}$　の

　ところで分母が６と４の分数列は重複するので，点は４－２＝２（個）増えます。

よって，＜４，６＞は条件を満たします。また，ここに４か６の約数である２か３が分母の分数列を重ねても点の数は変わらないので，分母が２の分数列を重ねるかどうかで２通り，分母が３の分数列を重ねるかどうかで２通りですから，２×２＝４（通り）です。

＜５＞を重ねたとき

５は素数ですから，５より小さい整数２，３，４と互いに素であるため，分母が２の分数列と重ねると１個，分母が３の分数列と重ねると２個，分母が４の分数列と重ねると３個の点が増えるので，

＜２，３，５＞と＜４，５＞が条件を満たします。また，４の約数である２が分母の分数列と重ねることができるので，＜２，４，５＞も条件を満たすので，あわせて３通りです。

分母が４以下の分数列はどう重ねても８個にはならないので，３＋１＋４＋３＝１１（通り）です。

最難関問題

（３）分母が１２の分数列から順に考えていきます。

＜１２＞を重ねたとき

分母が１２の分数列と完全に重複するのは，分母が１２の約数である２，３，４，６の分数列ですから，それぞれの分数列と重ねるか重ねないかで，２×２×２×２＝１６（通り），すべてと重ねない場合の＜１２＞はルール違反ですから除いて，１６－１＝１５（通り）です。

＜１１＞を重ねたとき

１１は素数ですから，１より大きく１０以下の整数とは互いに素です。よって，点が１個増えるのは分母が２の分数列と重ねたときだけですから，＜２，１１＞の１通りが条件を満たします。

＜１０＞を重ねたとき

１より大きく９以下の整数のうちで，１０の約数ではない数を２種類に分けて考えます。

○ １０と互いに素…３が分母の分数列で２個，７が分母の分数列で６個，９が分母の分数列で８個点が増えます。

○ １０と互いに素ではない…４，６，８は１０との最大公約数が２ですから，点が２個重複します。よって，４が分母の分数列で４－２＝２（個），６が分母の分数列で４個，８が分母の分数列で６個点が増えます。

よって，＜３，１０＞，＜４，１０＞が条件を満たします。また，どちらの場合も分母が２か５の分数列と重ねても点は増えないので，それぞれ２×２＝４（通り）で，あわせて４×２＝８（通り）です。

＜９＞を重ねたとき

１より大きく８以下の整数のうちで，９の約数ではない数を２種類に分けて考えます。

○ ９と互いに素…２が分母の分数列で１個，４が分母の分数列で３個，…点が増えます。

○ ９と互いに素ではない…６は９との最大公約数が３ですから，点が３個重複します。よって，６が分母の分数列で６－３＝３（個）点が増えます。

よって，＜４，９＞，＜６，９＞が条件を満たします。また，どちらの場合も分母が２か３の分数列と重ねても点は増えないので，それぞれ２×２＝４（通り）で，あわせて４×２＝８（通り）です。

最難関問題

＜８＞を重ねたとき

１より大きく７以下の整数のうちで，８の約数ではない数を２種類に分けて考えます。

○ ８と互いに素…３が分母の分数列で２個，５が分母の分数列で４個，…点が増えます。

○ ８と互いに素ではない…６は８との最大公約数が２ですから，点が２個重複します。よって，６が分母の分数列で６－２＝４（個）点が増えます。

よって，＜５，８＞，＜６，８＞が条件を満たします。＜５，８＞の場合は分母が２か４の分数列と重ねても点は増えないので，２×２＝４（通り）です。＜６，８＞の場合は分母が２，３，４の分数列と重ねても点は増えないので，２×２×２＝８（通り）です。あわせて４＋８＝１２（通り）です。

＜７＞を重ねたとき

７は素数ですから，１より大きく６以下の整数とは互いに素です。２が分母の分数列で１個，３が分母の分数列で２個，４が分母の分数列で３個，５が分母の分数列で４個，６が分母の分数列で５個，点が増えます。

以上で和が５となるのは，分母が２と５の分数列，分母が３と４の分数列，分母が６の分数列です。２と５，３と４は互いに素ですから，余計な重複は生じません。また，４は６の約数ではないものの互いに素でもない数ですが，４と６を重ねると５個より多く点が増えてしまいます。よって，＜２，５，７＞，＜３，４，７＞，＜６，７＞が条件を満たします。

＜２，５，７＞は１以外の公約数がないので１通り，＜３，４，７＞は２が分母の分数列を重ねても点は増えないので２通り，＜６，７＞は２か３が分母の分数列と重ねても点は増えないので２×２＝４（通り）ですから，あわせて１＋２＋４＝７（通り）です。

＜６＞を重ねたとき

１より大きく５以下の整数のうちで，６の約数ではない数を２種類に分けて考えます。

○ ６と互いに素…５が分母の分数列で４個点が増えます。

○ ６と互いに素ではない…４が分母の分数列で２個点が増えます。

５と４は互いに素なので，あわせると４＋２＝６（個）点が増えます。よって，＜４，５，６＞が条件を満たします。この場合，分母が２か３の分数列と重ねても点は増えないので，２×２＝４（通り）です。

分母が５以下の分数列はどう重ねても８個にはならないので，
１５＋１＋８＋８＋１２＋７＋４＝５５（通り）です。