

最難関問題

車輪模様のテッセレーション・2

下の図1, 図2のようにして, 1辺の長さが8 cmの正六角形, 正方形, 正三角形のタイルを平面に敷きつめていきます。図1では正六角形のタイルを4枚, 正方形のタイルを9枚, 正三角形のタイルを3枚使っています。また, 1辺の長さが8 cmの正三角形の高さは7 cmとします。

図1

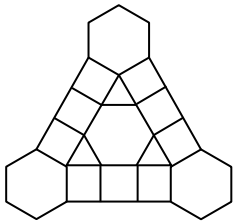


図2

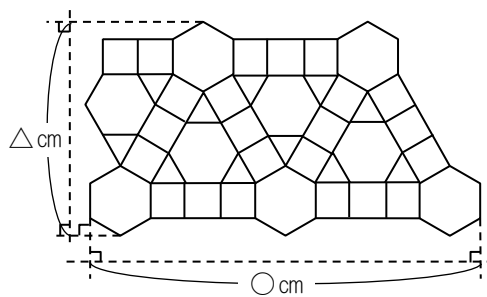
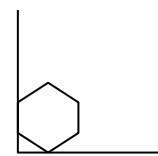


図3



- (1) 図2の○, △にあたる値を答えなさい。
- (2) たて82 cm, 横52 cmの長方形の左下に, 図3のように正六角形のタイルをぴったりと置いたうえで, 図1, 2のきまりにしたがってタイルを長方形からはみ出さないようにできるだけたくさん敷きつめます。全部で何枚のタイルを敷きつめることができますか。
- (3) 1辺の長さが1801 cmの正方形の左下に, 図3のように正六角形のタイルをぴったりと置いたうえで, 図1, 2のきまりにしたがってタイルを長方形からはみ出さないようにできるだけたくさん敷きつめます。正六角形のタイルと正三角形のタイルは, それぞれ何枚敷きつめることができますか。

最難関問題

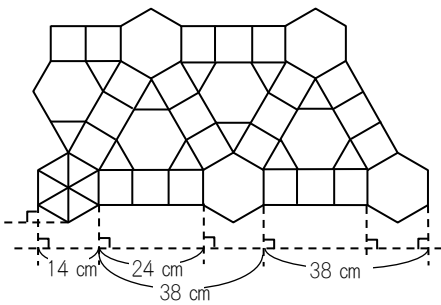
車輪模様のテッセレーション・2

- (1) $\bigcirc \cdots 90$, $\triangle \cdots 49$ (2) 43枚 (3) 正六角形 $\cdots 7689$ 枚, 正三角形 $\cdots 15376$ 枚

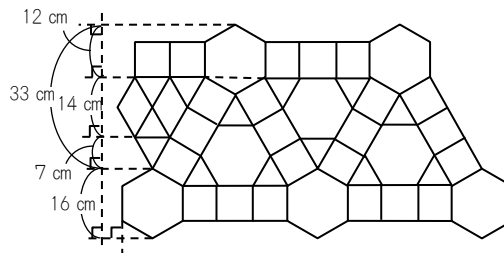
テッセレーションとは、有限の種類を図形を平面に隙間なく敷き詰めることです。この問題では、正三角形・正方形・正六角形を組みあわせて車輪のような模様を描きながら平面を敷き詰めています。また、図形全体は正三角形状の形を保って大きくなっていきます。

- (1) \bigcirc の値は、図①より $14 + 38 \times 2 = 90$ (cm), \triangle の値は、図②より $16 + 33 = 49$ (cm) です。

図①

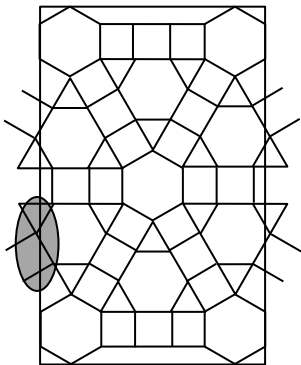


図②

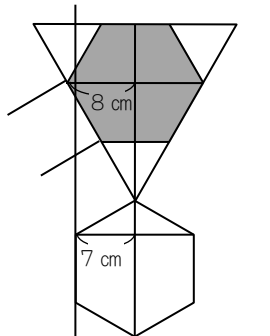


- (2) $82 = 16 + 33 \times 2$, $52 = 14 + 38 \times 1$ なので、図③のようになります。丸で囲った部分は、拡大すると図④のようになるので、影をつけた正六角形は長方形からはみ出します。よって、タイルは図⑤のように敷き詰められます。正六角形のタイルが7枚、正方形のタイルが22枚、正三角形のタイルが14枚あるので、全部で $7 + 22 + 14 = 43$ (枚) です。

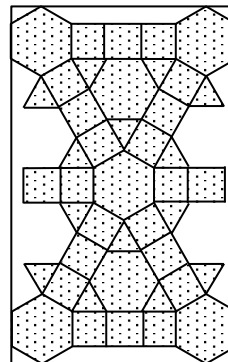
図③



図④



図⑤



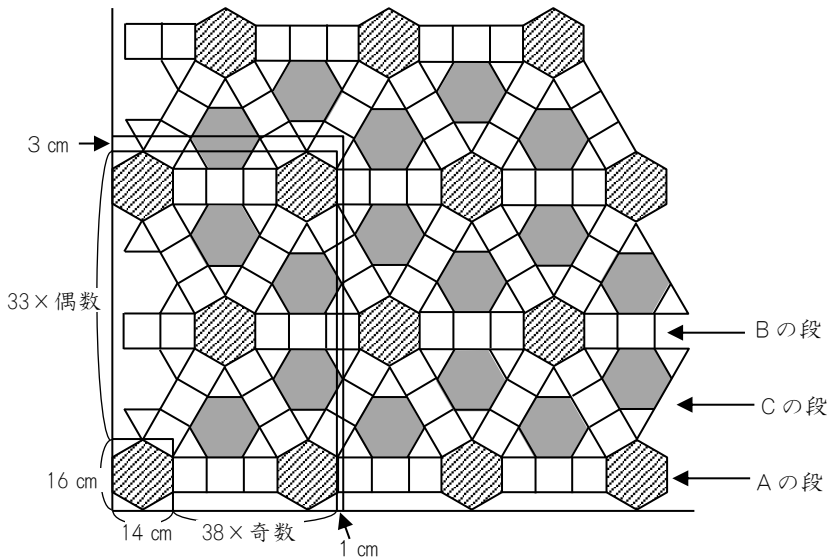
最難関問題

(3) $1801 \div 33 = 54$ 余り 19 より，縦の長さの 1801 cm は， $16 + 33 \times 54 + 3$ ととらえることができます。同様に， $1801 \div 38 = 47$ 余り 15 より，横の長さは $14 + 38 \times 47 + 1$ ととらえることができます。

まず，正六角形のタイルの枚数を考えます。 33×54 は $33 \times$ 偶数であり， 38×47 は $38 \times$ 奇数なので，その点では (2) で考えた長方形の場合と同じですから，縦に 3 cm，横に 1 cm 余分に長い部分の様子は図⑥においてとらえることができます。斜線で示した向きの正六角形は A の段に $1 + 47 = 48$ (枚) 並び，B の段では $48 - 1 = 47$ (枚) 並びます。こうして， 48 個， 47 個， 48 個， 47 個，… と交互に並ぶので， $48 \times (1 + 27) + 47 \times 27 = 2613$ (枚) です。

次に，影をつけた向きの正六角形が C の段に何枚並ぶのかを考えます。図のように，右端に 1 cm 余りな長さがあるおかげで，正方形の右端においてもタイルははみ出さないで，C の段には $2 \times 47 = 94$ (枚) 並びます。C より上の段でも同じように横に 94 枚並ぶので， $94 \times 54 = 5076$ (枚) です。よって正六角形のタイルは全部で， $2613 + 5076 = 7689$ (枚) です。

図⑥



正三角形のタイルは大まかには影をつけた正六角形のタイルの枚数の 3 倍である， $5076 \times 3 = 15228$ (枚) です。正方形の左端の部分では影をつけた正六角形のタイルの周りにはないものが $2 \times 54 = 108$ (枚) あり，右端の部分では正六角形のタイルの周りに 2 枚ずつしかないので $1 \times 54 = 54$ (枚) 少なく，一番上の部分では影をつけた正六角形のタイルの周りにはないものが $2 \times 47 = 94$ (枚) あるので，すべて合わせると， $15228 + 108 - 54 + 94 = 15376$ (枚) です。