

## 最難関問題

### 和分解と順位

何個かのボールを何人かで分けます。分けるときは、全員の個数が異なるようにします。次の問いに答えなさい。

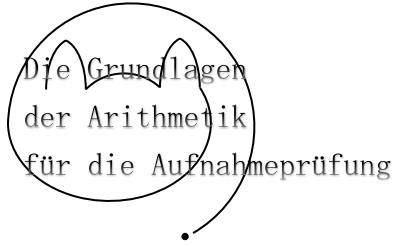
(1) 100個のボールを、少ない順に一郎、次郎、三郎、四郎、五郎の5人で分けます。それぞれがもらうボールの個数は、最も多い場合と少ない場合で何個ですか。

	一郎	次郎	三郎	四郎	五郎
最多	個	個	個	個	個
最小	個	個	個	個	個

(2) 9000個のボールを何人かで分けます。

① ボールの個数が3番目に多い人が、最も多くて2800個のボールをもらえるとき、何人でボールを分けますか。

② ボールの個数が3番目に多い人がもらえる最も多いボールの個数と、2番目に多い人がもらえる最も多いボールの個数の差が788個のとき、何人でボールを分けますか。



## 最難関問題

和分解と順位

(1)

	一郎	次郎	三郎	四郎	五郎
最多	18個	23個	31個	46個	90個
最小	1個	2個	3個	4個	22個

(2) 37人 (3) 92人

(1) 解説省略

(2) 3番目に多い人の個数が最多になるとき、1番少ない人から4番目に多い人までに配られるボールの個数は、1, 2, 3, ...,  $(\square - 1)$ ,  $\square$ , という1から順に整数を並べた列になります。

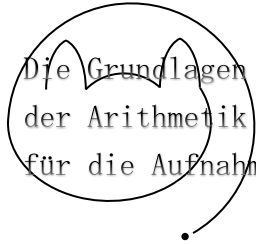
$$1, 2, 3, \dots, (\square - 1), \square \text{ — } 2800, 2801 \text{ くらい}, 2802 \text{ くらい}$$

上位3人に配られたボールの個数は  $2801 \times 3 = 8403$  (個) 以上で、4番目に多い人までに配られた個数の和は、 $9000 - 8403 = 597$  (個) 以下です。また、4番目に多い人までに配られた個数の和は  $1 + 2 + 3 + \dots$  という「三角数」になるので、597以下でできるだけ597に近い三角数を探します。

$(1 + \square) \times \square \div 2 \leq 597$  より、 $(1 + \square) \times \square \leq 1194$  なので、連続する整数である  $(1 + \square)$  と  $\square$  の積が1194以下でできるだけ近い場合を探すと、 $35 \times 34 = 1190$  が見つかります。

$\square = 34$  の場合、 $1 + 2 + 3 + \dots + \square = 1190 \div 2 = 595$ 、 $9000 - 595 = 8405$  なので、 $2800 + 2801 + 2802 = 8403$  の場合より2多いことから、 $2800 + 2802 + 2803 = 8405$  となります。

よって人数は、 $34 + 3 = 37$  (人) です。



## 最難関問題

(3) 3番目に多い人の最多を $\Delta$ 個とすると、3番目に多い人が最多になる場合と2番目に多い人が最多になる場合は、次のようにボールを配ったときです。ただし、 $\Delta + 1$ 、 $\Delta + 2$ 、 $\Delta + 789$ はおおよその値です。

$$1, 2, 3, \dots, \square \begin{cases} \Delta, & \Delta + 1, & \Delta + 2 \\ \square + 1, & \Delta + 788, & \Delta + 789 \end{cases}$$

このとき、 $\Delta$ はおおよそ、 $\square + 1 + 788 + 789 - (1 + 2) = \square + 1575$ くらいとなるので、ボールの総数9000はおおよそ、

$$1 + 2 + \dots + \square + (\square + 1575) + (\square + 1576) + (\square + 1577) \\ = 1 + 2 + \dots + \square + \square \times 3 + 4728 \text{ くらいです。}$$

$1 + 2 + \dots + \square + \square \times 3$ はおおよそ、 $9000 - 4728 = 4272$ くらいです。ここから $\square$ についておおよそのあたりをつけて、正答を探します。

$$1 + 2 + \dots + 100 = 5050 \text{ の手前を考えて } \square = 90 \text{ とすると, } 1 + 2 + \dots + 90 = 4095 \text{ で,} \\ 4095 + 90 \times 3 = 4385 \text{ です。もう少し近づけて } \square = 89 \text{ とすると,}$$

$$1 + 2 + \dots + 89 = 4005, \quad 4005 + 89 \times 3 = 4272 \text{ でちょうど一致します。}$$

このとき、3番目に多い人の最多は、

$$9000 - 4005 = 4995, \quad 4995 \div 3 = 1665 \text{ より, 上位3人の個数が} \\ 1664, 1665, 1666 \text{ となるので, } 1664 \text{ 個です。}$$

2番目に多い人の最多は、 $4995 - 90 = 4905$ 、 $4905 \div 2 = 2452.5$ より、上位2人の個数が2452、2453となるので、2452個です。 $2452 - 1664 = 788$ より、 $\square = 89$ が正しいことがわかります。よって、 $89 + 3 = 92$  (人) です。