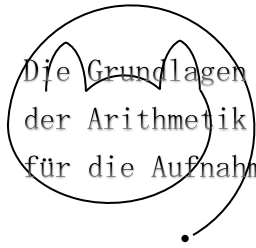


最難関問題

和と積の式と範囲

以下の問いに答えなさい。

- (1) 4つの整数 $\circ \leq \triangle \leq \square \leq \diamond$ について、 $\circ + \triangle + \square + \diamond = \circ \times \triangle \times \square \times \diamond$ が成り立つとき、次の問いに答えなさい。
- ① $\circ \times \triangle \times \square$ は必ずある整数 a 以下になります。整数 a を求めなさい。
 - ② $(\circ, \triangle, \square, \diamond)$ にあてはまる整数の組みあわせをすべて答えなさい。
- (2) 3つの整数 $\circ \leq \triangle \leq \square$ について、 $\circ + \triangle + \square = \circ \times \triangle \times \square \div 4$ が成り立つとき、 $(\circ, \triangle, \square)$ にあてはまる整数の組みあわせをすべて答えなさい。
- (3) 4つの整数 $\circ \leq \triangle \leq \square \leq \diamond$ について、 $\circ + \triangle + \square + \diamond = (\circ \times \triangle \times \square \times \diamond - 1) \div 5$ が成り立つとき、 $(\circ, \triangle, \square, \diamond)$ にあてはまる整数の組みあわせをすべて答えなさい。



最難関問題

和と積の式と範囲

(1) ① 4 ② (1, 1, 2, 4)

(2) (1, 8, 9), (1, 6, 14), (1, 5, 24), (2, 4, 6), (2, 3, 10)

(3) (1, 1, 11, 11), (1, 1, 9, 14), (1, 1, 8, 17), (1, 1, 7, 23),
(1, 1, 6, 41), (1, 2, 4, 12), (1, 2, 3, 31), (1, 3, 3, 9)

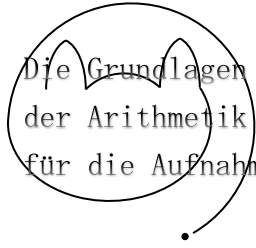
(1)

① $\bigcirc + \triangle + \square + \diamond \leq \diamond + \diamond + \diamond + \diamond = 4 \times \diamond$ なので,
 $\bigcirc \times \triangle \times \square \times \diamond \leq 4 \times \diamond$ です。よって, $\bigcirc \times \triangle \times \square \leq 4$ です。

② $\bigcirc \times \triangle \times \square \leq 4$ であることから,

$(\bigcirc, \triangle, \square) = (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 1, 4), (1, 2, 2),$
のいずれかです。

(1, 1, 1)の場合, $1 + 1 + 1 + \diamond = 1 \times 1 \times 1 \times \diamond$ より, $3 + \diamond = \diamond$ となるので, 条件を満たす \diamond はありません。同様に調べていくと, $(\bigcirc, \triangle, \square, \diamond) = (1, 1, 2, 4)$ の場合のみ条件を満たします。



最難関問題

(2) (1) と同様に考えると、 $\bigcirc + \triangle + \square \leq \square \times 3$ であることから、 $\bigcirc \times \triangle \times \square \div 4 \leq \square \times 3$ 、 $\bigcirc \times \triangle \times \square \leq \square \times 12$ 、 $\bigcirc \times \triangle \leq 12$ です。

手始めに $(\bigcirc, \triangle) = (1, 12)$ の場合を考えてみます。 $1 + 12 + \square = 1 \times 12 \times \square \div 4$ 、 $13 \times 4 + \square \times 4 = 12 \times \square$ 、 $13 \times 4 = 12 \times \square - \square \times 4 = (12 - 4) \times \square = 8 \times \square$ となるので、 \square は整数になりません。

ここで行った計算を \bigcirc と \triangle を使って表すと、 $(\bigcirc + \triangle) \times 4 = (\bigcirc \times \triangle - 4) \times \square$ となります。

$(\bigcirc + \triangle) \times 4$ が $(\bigcirc \times \triangle - 4)$ の倍数で、 \square が \triangle 以上であれば、条件を満たす $(\bigcirc, \triangle, \square)$ の組み合わせになっています。表で調べ上げると次のようになり、かげをつけた部分が条件を満たします。

($\bigcirc = 1$ の場合)

\triangle	12	11	10	9	8	7	6	5
$(1 + \triangle) \times 4$	52	48	44	40	36	32	28	24
$(1 \times \triangle - 4)$	8	7	6	5	4	3	2	1

よって、 $(1, 8, 9)$ 、 $(1, 6, 14)$ 、 $(1, 5, 24)$ です。

($\bigcirc = 2$ の場合)

\triangle	6	5	4	3
$(2 + \triangle) \times 4$	32	28	24	20
$(2 \times \triangle - 4)$	8	6	4	2

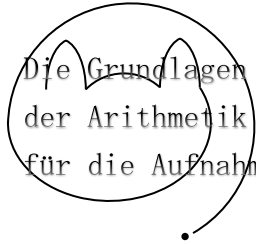
よって、 $(2, 4, 6)$ 、 $(2, 3, 10)$ です。

($\bigcirc = 3$ の場合)

\triangle	4	3
$(3 + \triangle) \times 4$	28	24
$(3 \times \triangle - 4)$	8	5

条件を満たす組み合わせはありません。

以上より、 $(1, 8, 9)$ 、 $(1, 6, 14)$ 、 $(1, 5, 24)$ 、 $(2, 4, 6)$ 、 $(2, 3, 10)$ です。



最難関問題

(3) $\circ + \triangle + \square + \diamond \leq \diamond \times 4$ であることから, $(\circ \times \triangle \times \square \times \diamond - 1) \div 5 \leq \diamond \times 4$,

$\circ \times \triangle \times \square \times \diamond - 1 \leq \diamond \times 20$, $\circ \times \triangle \times \square - \frac{1}{\diamond} \leq 20$ です。 $\frac{1}{\diamond}$ は 1 未満であることと, $\circ \times \triangle \times \square$ が整数であることから, $\circ \times \triangle \times \square \leq 20$ が成り立ちます。

(2) と同様に, 手始めに $(\circ, \triangle, \square) = (1, 1, 20)$ の場合を考えてみます。

$$1 + 1 + 20 + \diamond = (1 \times 1 \times 20 \times \diamond - 1) \div 5,$$

$$22 \times 5 + \diamond \times 5 = 20 \times \diamond - 1, \quad 22 \times 5 + 1 = 20 \times \diamond - \diamond \times 5,$$

$$111 = (20 - 5) \times \diamond = 15 \times \diamond \text{ となるので, } \diamond \text{ は整数になりません。}$$

ここで行った計算を $\circ, \triangle, \square$ を使って表すと, $(\circ + \triangle + \square) \times 5 + 1 = (\circ \times \triangle \times \square - 5) \times \diamond$ となります。

$(\circ + \triangle + \square) \times 5 + 1$ が $(\circ \times \triangle \times \square - 5)$ の倍数で, \diamond が \square 以上であれば, 条件を満たす

$(\circ, \triangle, \square, \diamond)$ の組み合わせになっています。表で調べ上げると次のようになり, かげをつけた部分が条件を満たします。

($\circ = \triangle = 1$ の場合)

\square	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
$(2 + \square) \times 5 + 1$	111	106	101	96	91	86	81	76	71	66	61	56	51	46	41
$(1 \times \square - 5)$	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

よって, $(1, 1, 11, 11), (1, 1, 9, 14), (1, 1, 8, 17), (1, 1, 7, 23), (1, 1, 6, 41)$ です。

($\circ = 1, \triangle = 2$ の場合)

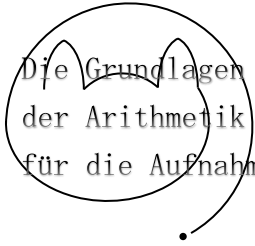
\square	10	9	8	7	6	5	4	3
$(3 + \square) \times 5 + 1$	66	61	56	51	46	41	36	31
$(2 \times \square - 5)$	15	13	11	9	7	5	3	1

よって, $(1, 2, 4, 12), (1, 2, 3, 31)$ です。

($\circ = 1, \triangle = 3$ の場合)

\square	6	5	4	3
$(4 + \square) \times 5 + 1$	51	46	41	36
$(3 \times \square - 5)$	13	10	7	4

よって, $(1, 3, 3, 9)$ です。



最難関問題

($\bigcirc = 1$, $\triangle = 4$ の場合)

\square	5	4
$(5 + \square) \times 5 + 1$	51	46
$(4 \times \square - 5)$	15	11

条件を満たす組み合わせはありません。

($\bigcirc = 2$, $\triangle = 2$ の場合)

\square	5	4	3	2
$(4 + \square) \times 5 + 1$	46	41	36	31
$(4 \times \square - 5)$	15	11	7	3

条件を満たす組み合わせはありません。

($\bigcirc = 2$, $\triangle = 3$ の場合)

\square	3
$(5 + \square) \times 5 + 1$	41
$(6 \times \square - 5)$	13

条件を満たす組み合わせはありません。

以上より,

$(1, 1, 11, 11)$, $(1, 1, 9, 14)$, $(1, 1, 8, 17)$, $(1, 1, 7, 23)$,
 $(1, 1, 6, 41)$, $(1, 2, 4, 12)$, $(1, 2, 3, 31)$, $(1, 3, 3, 9)$ です。