

切手じょうよるい（剰余類）の逆算問題

何種類かの切手がたくさんあり、それらを組みあわせるといろいろな金額になります。使わない種類の切手があってもよいものとします。例えば、3円の切手と5円の切手を組みあわせると、金額が少ない順に、3円、5円、6円、8円、9円、10円、…、となります。10円より多い金額はすべて3円の切手と5円の切手を組みあわせることで作ることができるので、作ることができない金額は、1円、2円、4円、7円の4通りになります。

(1) 何種類かの切手を組みあわせたところ、作ることができない金額は、

1円、2円、3円、5円、6円、7円、10円、11円、14円、15円、19円

でした。切手の種類が最も少ないとき、何円の切手を組みあわせましたか。

例えば、1円、2円、3円、4円の切手を組みあわせた場合は、(1円、2円、3円、4円)と答えなさい。

(2) 2種類の切手を組みあわせたところ、作ることができない金額は6通りになりました。切手の組みあわせとして考えられるものを、すべて答えなさい。

(3) 2種類の切手を組みあわせたところ、作ることができない金額は15通りになりました。切手の組みあわせとして考えられるものを、すべて答えなさい。



切手（剰余類）の逆算問題

- (1) (4円, 9円, 23円)    (2) (2円, 13円), (3円, 7円), (4円, 5円)  
 (3) (2円, 31円), (3円, 16円), (4円, 11円), (6円, 7円)

(1) 1円, 2円, 3円を作れず, 4円は作れるので, 金額が最も少ない切手は4円の切手です。4円の切手があるということは, 4の倍数に当たる金額はすべて作れます。表にすると, 図①のようになります。影をつけた部分は, 作れない金額を表しています。すると, 4円の次に組みあわせる切手は9円となります。9円切手を用いることで, 9円, 18円, 27円といった9の倍数に当たる金額と, それに4の倍数を加えた金額は作ることができるので, 図②のようになります。よって, 23円の切手を組みあわせることで, 図③のようになって条件を満たします。

図①

1	5	9	13	17	21	25	...
2	6	10	14	18	22	26	...
3	7	11	15	19	23	27	...
④	8	12	16	20	24	28	...

図②

1	5	⑨	13	17	21	25	...
2	6	10	14	⑮	22	26	...
3	7	11	15	19	23	⑳	...
④	8	12	16	20	24	28	...

図③

1	5	⑨	13	17	21	25	...
2	6	10	14	⑮	22	26	...
3	7	11	15	19	⑳	27	...
④	8	12	16	20	24	28	...

(2) とりあえず, 少ない金額の切手から考えます。1円の切手があるとすべての金額を作ってしまうので, 2円の切手の場合から考えます。

2円の切手

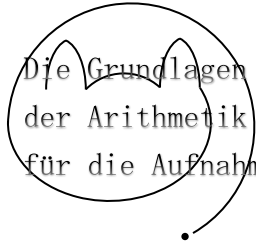
2円の切手があるということは, 2の倍数に当たる金額はすべて作れるので, 図④のようになります。影をつけた部分は, 作れない金額を表しています。よって, 次に組みあわせる切手を13円とすると, 図⑤のようになって, 作ることができない金額が1円, 3円, 5円, 7円, 9円, 11円の6通りとなりますから, (2円, 13円) です。

図④

1	3	5	7	9	11	13	15	...
②	4	6	8	10	12	14	16	...

図⑤

1	3	5	7	9	11	⑬	15	...
②	4	6	8	10	12	14	16	...



3 円の切手

3 円の切手があるということは、3 の倍数に当たる金額はすべて作れるので、図⑥のようになります。次に組みあわせる切手を 4 円とすると、図⑦のようになって、作ることができない金額が 1 円、2 円、5 円の 3 通りとなるので、条件を満たしません。また、5 円とすると、図⑧のようになって、作ることができない金額が 1 円、2 円、4 円、7 円の 4 通りとなるので、条件を満たしません。

図⑥

1	4	7	10	13	16	...
2	5	8	11	14	17	...
③	6	9	12	15	18	...

図⑦

1	④	7	10	13	16	...
2	5	⑧	11	14	17	...
③	6	9	12	15	18	...

図⑧

1	4	7	⑩	13	16	...
2	⑤	8	11	14	17	...
③	6	9	12	15	18	...

7 円とすると、図⑨のようになって、作ることができない金額が 1 円、2 円、4 円、5 円、8 円、11 円の 6 通りとなるので、条件を満たします。7 円より多い金額の切手の場合は作ることができない金額がさらに多くなるので、(3 円、7 円) が答えとなります。

図⑨

1	4	⑦	10	13	16	...
2	5	8	11	⑭	17	...
③	6	9	12	15	18	...

4 円の切手

4 円の切手があるということは、4 の倍数に当たる金額はすべて作れるので、図⑩のようになります。次に組みあわせる切手を 5 円とすると、図⑪のように作ることができない金額が 1 円、2 円、3 円、6 円、7 円、

11 円の 6 通りとなるので、条件を満たします。5 円より多い金額の切手の場合は作ることができない金額がさらに多くなります。例えば 6 円の場合、4 と 6 は互いに素ではないため、最大公約数の 2 の倍数ではない数、つまり奇数に当たる金額は、図⑫のように、すべて作れません。また、互いに素である 7 円の場合であっても、(4 円、5 円) のときより作ることができない金額が多くなります。

よって、(4 円、5 円) が答えとなります。

図⑩

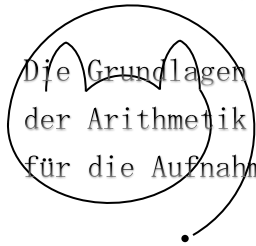
1	5	9	13	17	...
2	6	10	14	18	...
3	7	11	15	19	...
④	8	12	16	20	...

図⑪

1	⑤	9	13	17	...
2	6	⑩	14	18	...
3	7	11	⑮	19	...
④	8	12	16	20	...

図⑫

1	5	9	13	17	...
2	⑥	10	14	18	...
3	7	11	15	19	...
④	8	12	16	20	...



最難関問題

5円以上の切手

作ることができない金額は6通りより多くなります。例えば5円切手の場合、互いに素である(5円, 6円)の場合には図⑬より作ることができない金額は $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ (通り)となり、同じく互いに素である(5円, 7円), (5円, 8円)の場合はさらに多くなります。以降も同様であるため、条件を満たすことはありません。

図⑬

1	6	11	16	21	...
2	7	12	17	22	...
3	8	13	18	23	...
4	9	14	19	24	...
5	10	15	20	25	...

以上より、(2円, 13円), (3円, 7円), (4円, 5円)の3通りが答えとなります。

(3) (2)において、(2円, 3円)の図⑦, (4円, 5円)の図⑩, (5円, 6円)の図⑬では、作ることができない金額はそれぞれ $1 + 2 = 3$ (通り),  $1 + 2 + 3 = 6$ (通り),  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ (通り)というように、三角数になっています。15も三角数ですから、(6円, 7円)のときに、図⑭のように $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ (通り)となります。よって、あとは切手の金額の少ないほうが5円以下の場合を考えればよいことになります。

すると、5円ときはちょうど15通りになる場合がなく、4円ときは(4円, 11円)が図⑮のようになって条件を満たします。3円ときは(3円, 16円)が図⑯, 2円ときは(2円, 31円)が図⑰のように条件を満たします。

図⑭

1	7	13	19	25	31	...
2	8	14	20	26	32	...
3	9	15	21	27	33	...
4	10	16	22	28	34	...
5	11	17	23	29	35	...
6	12	18	24	30	36	...

図⑮

1	5	9	13	17	21	25	29	33	...
2	6	10	14	18	22	26	30	34	...
3	7	11	15	19	23	27	31	35	...
4	8	12	16	20	24	28	32	36	...

図⑯

1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	...
2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	...
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	...

図⑰

1	3	...	29	31	...
2	4	...	30	32	...

以上より、(2円, 31円), (3円, 16円), (4円, 11円), (6円, 7円)の4通りです。