受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

## 切手（剰余類）の逆算問題

何種類かの切手がたくさんあり，それらを組みあわせるといろいろな金額になります。使わない種類の切手があってもよいものとします。例えば，３円の切手と５円の切手を組みあわせると，金額が少ない順に，３円，５円，６円，８円，９円，１０円，…，となります。１０円より多い金額はすべて３円の切手と５円の切手を組みあわせることで作ることができるので，作ることができない金額は，１円，２円，４円，７円の４通りになります。

（１）何種類かの切手を組みあわせたところ，作ることができない金額は，
１円，２円，３円，５円，６円，７円，１０円，１１円，１４円，１５円，１９円
でした。切手の種類が最も少ないとき，何円の切手を組みあわせましたか。
例えば，１円，２円，３円，４円の切手を組みあわせた場合は，（１円，２円，３円，４円）と答えなさい。

（２）２種類の切手を組みあわせたところ，作ることができない金額は６通りになりました。切手の組みあわせとして考えられるものを，すべて答えなさい。

（３）２種類の切手を組みあわせたところ，作ることができない金額は１５通りになりました。切手の組みあわせとして考えられるものを，すべて答えなさい。

切手（剰余類）の逆算問題

（１）（４円，９円，２３円）　（２）（２円，１３円），（３円，７円），（４円，５円）

（３）（２円，３１円），（３円，１６円），（４円，１１円），（６円，７円）

（１）１円，２円，３円を作れず，４円は作れるので，金額が最も少ない切手は４円の切手です。４円の切手があるということは，４の倍数に当たる金額はすべて作れます。表にすると，図①のようになります。影をつけた部分は，作れない金額を表しています。すると，４円の次に組みあわせる切手は９円となります。９円切手を用いることで，９円，１８円，２７円といった９の倍数に当たる金額と，それに４の倍数を加えた金額は作ることができるので，図②のようになります。よって，２３円の切手を組みあわせることで，図③のようになって条件を満たします。

図①

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 25 | … |
| 2 | 6 | 10 | 14 | 18 | 22 | 26 | … |
| 3 | 7 | 11 | 15 | 19 | 23 | 27 | … |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | … |

図②

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 25 | … |
| 2 | 6 | 10 | 14 | 18 | 22 | 26 | … |
| 3 | 7 | 11 | 15 | 19 | 23 | 27 | … |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | … |

図③

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 25 | … |
| 2 | 6 | 10 | 14 | 18 | 22 | 26 | … |
| 3 | 7 | 11 | 15 | 19 | 23 | 27 | … |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | … |

（２）とりあえず，少ない金額の切手から考えます。１円の切手があるとすべての金額を作れてしまうので，２円の切手の場合から考えます。

２円の切手

　２円の切手があるということは，２の倍数に当たる金額はすべて作れるので，図④のようになります。影をつけた部分は，作れない金額を表しています。よって，次に組みあわせる切手を１３円とすると，図⑤のようになって，作ることができない金額が１円，３円，５円，７円，９円，１１円の６通りとなりますから，（２円，１３円）です。

図④

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | … |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | … |

図⑤

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | … |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | … |

３円の切手

　３円の切手があるということは，３の倍数に当たる金額はすべて作れるので，図⑥のようになります。次に組みあわせる切手を４円とすると，図⑦のようになって，作ることができない金額が１円，２円，５円の３通りとなるので，条件を満たしません。また，５円とすると，図⑧のようになって，作ることができない金額が１円，２円，４円，７円の４通りとなるので，条件を満たしません。

図⑥

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | … |
| 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | … |
| 3 | ~~6~~ | ~~9~~ | ~~12~~ | ~~15~~ | ~~18~~ | … |

図⑦

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | ~~7~~ | ~~10~~ | ~~13~~ | ~~16~~ | … |
| 2 | 5 | 8 | ~~11~~ | ~~14~~ | ~~17~~ | … |
| 3 | ~~6~~ | ~~9~~ | ~~12~~ | ~~15~~ | ~~18~~ | … |

図⑧

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 7 | 10 | ~~13~~ | ~~16~~ | … |
| 2 | 5 | ~~8~~ | ~~11~~ | ~~14~~ | ~~17~~ | … |
| 3 | ~~6~~ | ~~9~~ | ~~12~~ | ~~15~~ | ~~18~~ | … |

７円とすると，図⑨のようになって，作ることができない金額が１円，２円，４円，５円，８円，１１円の６通りとなるので，条件を満たします。7円より多い金額の切手の場合は作ることができない金額がさらに多くなるので，（３円，７円）が答えとなります。

図⑨

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 7 | ~~10~~ | ~~13~~ | ~~16~~ | … |
| 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | ~~17~~ | … |
| 3 | ~~6~~ | ~~9~~ | ~~12~~ | ~~15~~ | ~~18~~ | … |

４円の切手

　４円の切手があるということは，４の倍数に当たる金額はすべて作れるので，図⑩のようになります。次に組みあわせる切手を５円とすると，図⑪のように作ることができない金額が１円，２円，３円，６円，７円，
１１円の６通りとなるので，条件を満たします。５円より多い金額の切手の場合は作ることができない金額がさらに多くなります。例えば６円の場合，４と６は互いに素ではないため，最大公約数の２の倍数ではない数，つまり奇数に当たる金額は，図⑫のように，すべて作れません。また，互いに素である７円の場合であっても，（４円，５円）のときより作ることができない金額が多くなります。

　よって，（４円，５円）が答えとなります。

図⑩

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 9 | 13 | 17 | … |
| 2 | 6 | 10 | 14 | 18 | … |
| 3 | 7 | 11 | 15 | 19 | … |
| 4 | ~~8~~ | ~~12~~ | ~~16~~ | ~~20~~ | … |

図⑪

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | ~~9~~ | ~~13~~ | ~~17~~ | … |
| 2 | 6 | 10 | ~~14~~ | ~~18~~ | … |
| 3 | 7 | 11 | 15 | ~~19~~ | … |
| 4 | ~~8~~ | ~~12~~ | ~~16~~ | ~~20~~ | … |

図⑫

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 9 | 13 | 17 | … |
| 2 | 6 | ~~10~~ | ~~14~~ | ~~18~~ | … |
| 3 | 7 | 11 | 15 | 19 | … |
| 4 | ~~8~~ | ~~12~~ | ~~16~~ | ~~20~~ | … |

最難関問題

５円以上の切手

作ることができない金額は６通りより多くなります。例えば５円切手の場合，互いに素である（５円，６円）の場合には図⑬より作ることができない金額は１＋２＋３＋４＝１０（通り）となり，同じく互いに素である（５円，７円），（５円，８円）の場合はさらに多くなります。以降も同様であるため，条件を満たすことはありません。

図⑬

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 | … |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 | … |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 | … |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 | … |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | … |

以上より，（２円，１３円），（３円，７円），（４円，５円）の３通りが答えとなります。

（３）（２）において，（２円，３円）の図⑦，（４円，５円）の図⑪，（５円，６円）の図⑬では，作ることができない金額はそれぞれ１＋２＝３（通り），１＋２＋３＝６（通り），１＋２＋３＋４＝１０（通り）というように，三角数になっています。１５も三角数ですから，（６円，７円）のときに，図⑭のように１＋２＋３＋４＋５＝１５（通り）となります。よって，あとは切手の金額の少ないほうが５円以下の場合を考えればよいことになります。

すると，５円のときはちょうど１５通りになる場合がなく，４円のときは（４円，１１円）が図⑮のようになって条件を満たします。３円のときは（３円，１６円）が図⑯，２円のときは（２円，３１円）が図⑰のように条件を満たします。

図⑭

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 13 | 19 | 25 | 31 | … |
| 2 | 8 | 14 | 20 | 26 | 32 | … |
| 3 | 9 | 15 | 21 | 27 | 33 | … |
| 4 | 10 | 16 | 22 | 28 | 34 | … |
| 5 | 11 | 17 | 23 | 29 | 35 | … |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | … |

図⑮

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 25 | 29 | 33 | … |
| 2 | 6 | 10 | 14 | 18 | 22 | 26 | 30 | 34 | … |
| 3 | 7 | 11 | 15 | 19 | 23 | 27 | 31 | 35 | … |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | … |

図⑯

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 | 28 | 31 | … |
| 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 | 29 | 32 | … |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | … |

図⑰

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | … | 29 | 31 | … |
| 2 | 4 | … | 30 | 32 | … |

以上より，（２円，３１円），（３円，１６円），（４円，１１円），（６円，７円）の４通りです。