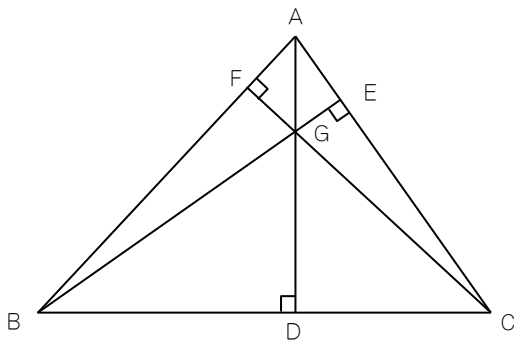


垂心

三角形 ABC の各頂点から向かいあう辺に向けて垂直な線 AD , BE , CF を引いたところ, 図のように一点 G で交わりました。また, BD と DC の長さの比は $10 : 7$, GB と GC の長さの比は $5 : 4$ となりました。



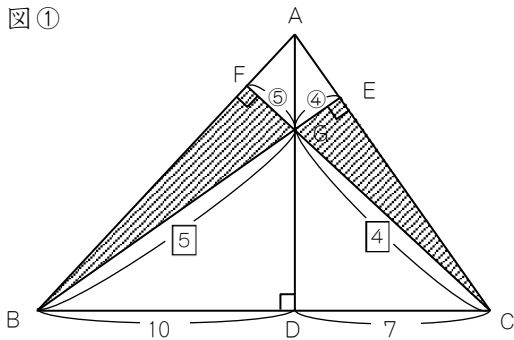
このとき, AE と EC の長さの比を求めなさい。



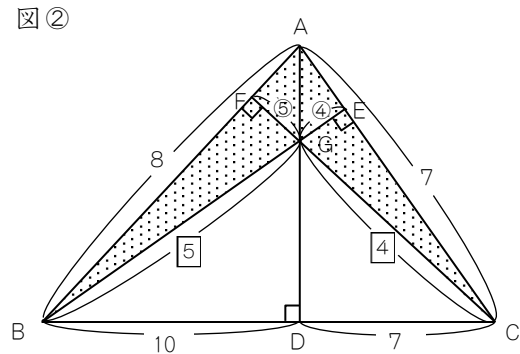
垂心 2 : 5

図①のように三角形BGFとCGEは5 : 4の相似なので、GF : GE = 5 : 4です。次に、図②において三角形BGAとCGAは面積の比が10 : 7です。また、高さの比はGF : GE = 5 : 4なので、底辺の比 $AB : AC = \frac{10}{5} : \frac{7}{4} = 8 : 7$ です。

図①



図②



三角形ABCは、ABを底辺とすると高さはCF、ACを底辺とすると高さはBEなので、CF : BEは $AB : BC = 8 : 7$ の逆比で7 : 8です。ここから、 $(5 + \boxed{4}) : (\boxed{4} + 5) = 7 : 8$ という比例式が成り立ちます。比例式を解くと、 $(\boxed{4} + 5) \times 7 = (5 + \boxed{4}) \times 8$ より、 $28 + \boxed{35} = 40 + \boxed{32}$ 、 $\boxed{3} = 12$ 、 $\boxed{1} = 4$ となります。

よって、図③のように点EからADに垂直な線EHを引くと、三角形BDGとEHGは $20 : 4 = 5 : 1$ の相似となるので、BD : EH = 10 : 2、CD : EH = 7 : 2となります。三角形ADCと三角形AHEは7 : 2の相似なので、AE : EC = 2 : (7 - 2) = 2 : 5です。

図③

