最難関問題

Ｎ進法と等差数列・階差数列

１４は，５進法では５×１＋１×４＝９，６進法では６×１＋１×４＝１０を，
１０進法では１０×１＋１×４＝１４を表します。
このことを，$[14]_5$＝９，$[14]_6$＝１０，$[14]_{10}$＝１４と表します。また，１４は４進法以下ではありえないので，$[14]_2$，$[14]_3$，$[14]_4$は考えません。
以下，$[\square]_{\triangle}$において，△は２以上１０以下の整数とします。

（１）$[24]_5$，$[24]_6$，$[24]_7$の値をそれぞれ求めなさい。

（２）２桁の整数Ａについて，$[A]_n$＝３６，$[A]_{n+1}$＝４０になるとき，整数Ａとして考えられるものをすべて答えなさい。

（３）３桁の整数Ｂについて，$[B]_m$と$[B]_{m+1}$の差が５１，$[B]_{m+1}$と$[B]_{m+2}$の差が５７になるとき，整数Ｂとして考えられるものをすべて答えなさい。

最難関問題

Ｎ進法と等差数列・階差数列

（１）$[24]_5$＝１４，$[24]_6$＝１６，$[24]_7$＝１８　（２）４０，４４

（３）３００，３０１，３０２，３０３，３０４，３０５，３０６，３０７，
３６０，３６１，３６２，３６３，３６４，３６５，３６６

（１）$[24]_5$＝５×２＋１×４＝１４，$[24]_6$＝６×２＋１×４＝１６，
$[24]_7$＝７×２＋１×４＝１８です。

（２）（１）では，$[24]_5$，$[24]_6$，$[24]_7$が１４，１６，１８という差が２の等差数列になっています。

２桁の整数Ａをｃｄとすると，

$[A]_n$＝ｎ×ｃ＋１×ｄ，$[A]_{n+1}$＝（ｎ＋１）×ｃ＋１×ｄ＝ｎ×ｃ＋ｃ＋ｄなので，その差はｃですから，$[A]_n$，$[A]_{n+1}$，$[A]_{n+2}$…は差がｃの等差数列になります。

よって，ｃ＝４０－３６＝４です。ｎ×４＋１×ｄ＝３６となる（ｎ，ｄ）の組みあわせは，（ｎ，ｄ）＝（９，０），（８，４），（７，８）で，そのときＡはそれぞれ４０，４４，４８になりますが，４８の場合，ｎ＝７なので，７進法で４８と書くことはありませんから，答えから除きます。よって，４０，４４です。

最難関問題

（３）３桁の整数２３４を例に考えてみます。

［２３４］$_5$＝５×５×２＋５×３＋１×４＝６９，

［２３４］$_6$＝６×６×２＋６×３＋１×４＝９４，

［２３４］$_7$＝７×７×２＋７×３＋１×４＝１２３，

となるので，１番下の位の４については差が無く，２番目の位の３については差が，（６－５）×３＝（７－６）×３＝３となって等差です。３番目の位の２については，５×５＝２５，６×６＝３６，７×７＝４９という平方数の差が１１，１３なので，差が２×１１＝２２，２×１３＝２６となって，４大きくなります。そのため，９４－６９＝２５と，１２３－９４＝２９の差が４となるのです。

このことから，Ｂが３桁のとき，［Ｂ］$_m$，［Ｂ］$_{m+1}$，［Ｂ］$_{m+2}$，［Ｂ］$_{m+3}$，…は階差数列になり，差の増え方は次のようになります。

平方数４，９，１６，２５，３６，４９，６４，８１，１００の差は，

奇数の列５，７，９，１１，１３，１５，１７，１９であり，隣り合う奇数の差は２なので，

整数Ｂ＝ｅｆｇとすると，階差数列［Ｂ］$_m$，［Ｂ］$_{m+1}$，［Ｂ］$_{m+2}$，［Ｂ］$_{m+3}$，…の差は，２×ｅずつ大きくなっていきます。よって，５７－５１＝６，６÷２＝３より，整数Ｂ＝３ｆｇです。

次に，［Ｂ］$_m$と［Ｂ］$_{m+1}$の差が５１であることを考えます。上の２３４の例からもわかるように，５１＝３×（５～１９のいずれかの奇数）＋ｆです。５１と３×（５～１９のいずれかの奇数）はどちらも３の倍数の奇数なので，ｆは３の倍数の偶数か０です。

ｆ＝０のとき，５１＝３×１７＋０です，１７＝８１－６４＝９×９－８×８なので，Ｂ＝３０ｇが８進法から１０進法のときに，差が５１，５７になります。よって，

Ｂ＝３００，３０１，３０２，３０３，３０４，３０５，３０６，３０７です。

ｆ＝６のとき，５１＝３×１５＋６です，１５＝６４－４９＝８×８－７×７なので，Ｂ＝３６ｇが７進法から１０進法のときに，差が５１，５７になります。よって，

Ｂ＝３６０，３６１，３６２，３６３，３６４，３６５，３６６です。