受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

Ｎ進法とは異なる位取り・１

　図１のような，斜面に沿ってビー玉を転がして穴に落とすことによってビー玉の数を数える装置があります。最初の穴には１個，次の穴には１０個，続いて１００個，１０００個，１００００個，…のビー玉が入ります。穴がビー玉でいっぱいになると，次のビー玉は１つ先の穴に落ちます。
　例えば６０００個のビー玉を転がすと，まず図２のようになります。このとき，いっぱいになった穴から，底を開けてビー玉を下に落とします。そして，いっぱいにならなかった穴のビー玉を取り出して，再び斜面を転がします。これを何回も繰り返し，すべてのビー玉を下に落とします。最後に，それぞれの穴の底を開けた回数によって，ビー玉の個数を表します。６０００個の場合，１００００以上の穴の底は一度も開かず，１０００の穴は５回，１００と１０の穴は９回，１の穴は１０回開くので，$\boxed{5}$ $\boxed{9}$ $\boxed{9}$ $\boxed{10}$となります。

図１

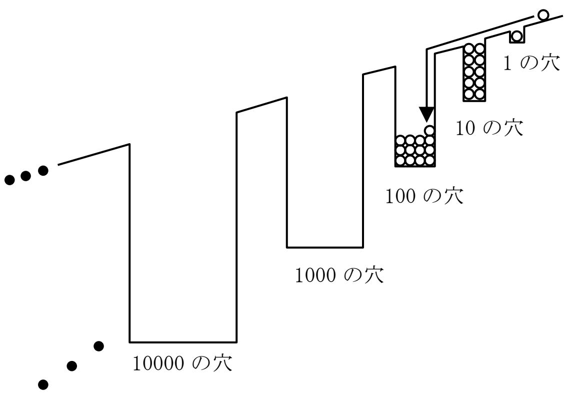
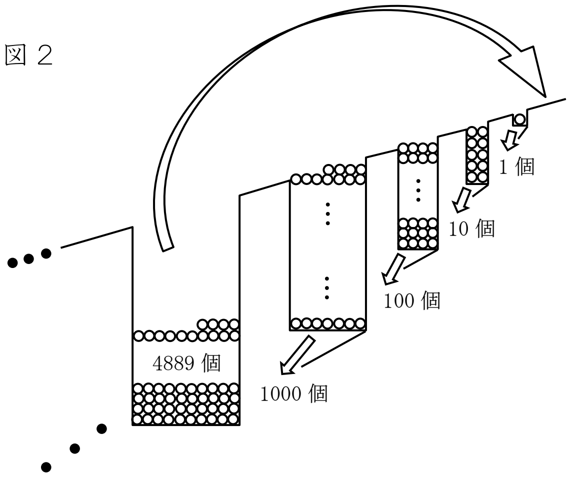


図２



（１）ビー玉の数が２０２０個であることを，この装置はどのように表しますか。

（２）

①　１００の穴までしか底が開かないとき，穴の底が開いた回数の和は最大でいくつですか。例えば，６０００個のビー玉の場合には１０００の穴が５回，１００と１０の穴が９回ずつ，１の穴が１０回開くので，穴の底が開いた回数の和は，５＋９×２＋１０＝３３です。

②　穴の底が開いた回数の和が最大で２５３であるのは，どの穴までしか底が開かないときですか。

（２枚目に続きます）

最難関問題

（３）穴の底が開いた回数の和が９００のとき，ビー玉の個数はどのように表されますか。ビー玉の個数が最も少ない場合と，６番目に少ない場合について，両側の３つの数を答えなさい。

最も少ない場合

$\square\square\square\cdots\square\square\square$

６番目に少ない場合

$\square\square\square\cdots\square\square\square$

Ｎ進法とは異なる位取り・１

（１）$\boxed{1}\ \boxed{9}\ \boxed{10}\boxed{20}$　（２）①５５　②1000000 の穴

（３）最小…$\boxed{6}\ \boxed{15}\boxed{24}$ … $\boxed{104}\boxed{113}\boxed{123}$　６番目に少ない…$\boxed{7}\ \boxed{15}\boxed{24}$ … $\boxed{104}\boxed{113}\boxed{123}$

（１）

１１１１，１１１，１１，１で順に割って行けばよいので，

２０００÷１１１１＝１余り９０９，

９０９÷１１１＝８余り２１，

２１÷１１＝１余り１０，

１０÷１＝１０より，

１０００の穴は１回，１００の穴は１＋８＝９（回），１０の穴は９＋１＝１０（回），１の穴は

１０＋１０＝２０（回）開きます。よって，$\boxed{1}\ \boxed{9}\ \boxed{10}\boxed{20}$です。

（２）①

まず，１００の穴の底が開く回数を考えます。

１００の穴の底が１１回以上開くとき，ビー玉は１１１×１１＝１２２１（個）以上です。すると，１０００の穴の底が開くので，条件を満たしません。

１００の穴の底が１０回開く場合，ビー玉は１１１×１０＝１１１０（個）以上ですが，１１１１個以上になると１０００の穴の底が開くので，ビー玉はちょうど１１１０個です。すると，$\boxed{10}\boxed{10}\boxed{10}$となるので，穴の底が開いた回数の和は，１０×３＝３０です。このように，一番上の位の数は最大で１０ですが，１０になった場合それより下の位も１０になってしまうため，穴の底が開いた回数の和はあまり大きくなりません。そこで，１００の穴の底が９回開く場合，を考えます。

ビー玉が１１０９個の場合を計算すると，$\boxed{9}\ \boxed{19}\boxed{19}$となります。穴の底が開いた回数の和は９＋１９×２＝４７となって３０よりはかなり大きくなりますが，１の穴の底が開いた回数が１０の穴の底が開いた回数より多くなっていないので，まだ不十分であると考えることができます。

しかし，１１０９個＝$\boxed{9}\ \boxed{19}\boxed{19}$より１多いと１１１０個＝$\boxed{10}\boxed{10}\boxed{10}$というふうに「くり上がって」しまうので，例えば$\boxed{9}\ \boxed{19}\boxed{20}$のような表し方はありません。というのも，$\boxed{9}\ \boxed{19}\ \boxed{a}$のように下の位の数が上の位の数よりも１０大きいということは，ビー玉の数を１１１で割ったときの余りが１１×１０＝１１０であることを意味するからです。これより１個でもビー玉の数が多いと，１１０＋１＝１１１となってくり上がってしまいます。よって，下の位が上の位よりも１０大きくなった場合，それ以下の位はすべて同じ数になります。

ということは，一番上の位が９で，以降位が１つ下がるたびに数は９ずつ増え，一番下の位だけ１０増える場合を考えればよいので，１００個の穴までしか底が開かない場合，$\boxed{9}\ \boxed{18}\boxed{28}$の９＋１８＋２８＝５５（回）が最大となります。

最難関問題

（２）②

他の穴までしか底が開かない場合を考えると，

１の穴まで…$\boxed{10}$の１０回が最大，

１０の穴まで…$\boxed{9}$ $\boxed{19}$の９＋１９＝２８（回）が最大，

１００の穴まで…$\boxed{9}$ $\boxed{18}$$\boxed{28}$の９＋１８＋２８＝５５（回）が最大，

１０００の穴まで…$\boxed{9}$ $\boxed{18}$$\boxed{27}$$\boxed{37}$の９＋１８＋２７＋３７＝９１（回）が最大，

というように，１＋２＋３＋４＝１０，１０＋５＋６＋７＝２８，２８＋８＋９＋１０＝５５，５５＋１１＋１２＋１３＝９１という「３つおきの三角数」になっています。

また，$\boxed{10}$は９×１＋１，$\boxed{9}$ $\boxed{19}$は９×（１＋２）＋１，$\boxed{9}$ $\boxed{18}$$\boxed{28}$は９×（１＋２＋３）＋１，$\boxed{9}$ $\boxed{18}$$\boxed{27}$$\boxed{37}$は９×（１＋２＋３＋４）＋１となっているので，「９×三角数＋１」にもなっています。

９×△＋１＝２５３より，△＝（２５３－１）÷９＝２８，２８＝１＋２＋３＋…＋７ですから，７番目の穴までの底が開くので，１０００００００の穴です。

（３）

９×△＋１が９００に近くなるのは，△＝１＋２＋３＋…＋１３＝９１となるときの，９×９１＋１＝８２０です。よって，１３＋１＝１４（番目）の穴までが開く場合を考えます。

一番上の位が１のとき，各位の数は最大で

$$\boxed{1}\ \underbrace{\ \ }_{9}\ \boxed{10}\ \underbrace{\ \ }_{9}\ \boxed{19}\ \underbrace{\ \ }_{9}\ \cdots\ \underbrace{\ \ }_{9}\ \boxed{109}\ \underbrace{\ \ }_{10}\ \boxed{119}$$

となりますから，和は最大で，

（１＋１０９）×１３÷２＋１１９＝８３４です。

一番上の位が２の場合，すべての位の数が上の場合より１大きく場合が最大で，８３４＋１４＝８４８です。以降も１４ずつ増えていくので，一番上の位が６のときの８３４＋１４×５＝９０４のときに初めて最大の和が９００をこえます。

$$\boxed{6}\ \underbrace{\ \ }_{9}\ \boxed{15}\ \underbrace{\ \ }_{9}\ \boxed{24}\ \underbrace{\ \ }_{9}\ \cdots\ \underbrace{\ \ }_{9}\ \boxed{114}\ \underbrace{\ \ }_{10}\ \boxed{124}$$

和が９０４となるのは左の場合です。ここから数を４減らすことを考えます。

この場合，考えなければならないのは，$\boxed{6}$ $\boxed{15}$$\boxed{24}$ … $\boxed{114}$$\boxed{124}$では，各位の数の差をこれ以上大きくはできないということです。よって，例えば$\boxed{114}$を３減らして$\boxed{111}$とし，$\boxed{124}$を１減らして$\boxed{123}$とすると，$\boxed{111}$と$\boxed{123}$の差が１２となってしまいます。このように，数を減らすときは，上の位は下の位と同じかより小さくしか減らすことができません。このことに注意をして４の和分解にしたがって各位の数を減らすと，以下のようになります。

	$\boxed{6}\ \boxed{15}\boxed{24}\cdots\boxed{87}\boxed{96}\boxed{105}\boxed{114}\boxed{124}$
（１，１，１，１）	$\boxed{6}\ \boxed{15}\boxed{24}\cdots\boxed{87}\boxed{95}\boxed{104}\boxed{113}\boxed{123}$
（１，１，２）	$\boxed{6}\ \boxed{15}\boxed{24}\cdots\boxed{87}\boxed{96}\boxed{104}\boxed{113}\boxed{122}$
（２，２）	$\boxed{6}\ \boxed{15}\boxed{24}\cdots\boxed{87}\boxed{96}\boxed{105}\boxed{112}\boxed{122}$
（１，３）	$\boxed{6}\ \boxed{15}\boxed{24}\cdots\boxed{87}\boxed{96}\boxed{105}\boxed{113}\boxed{121}$
（４）	$\boxed{6}\ \boxed{15}\boxed{24}\cdots\boxed{87}\boxed{96}\boxed{105}\boxed{114}\boxed{120}$

よって，ビー玉の数が最少となるのは，（１，１，１，１）のときの，$\boxed{6}\ \boxed{15}\boxed{24}\cdots\boxed{104}\boxed{113}\boxed{123}$です。ビー玉の数が少ない方から５番目までは以上の場合に含まれます。よって，６番目は一番上の位が７となる場合です。一番上の位が７の場合，$\boxed{7}\ \boxed{16}\boxed{25}\cdots\boxed{106}\boxed{115}\boxed{125}$のときに，９０４＋１４＝９１８で，和が最大になります。ここから１８減らすことを考えます。ただし，１４けたで考えている上，一番上の位は７なので，１８を１３個以下の整数に和分解します。最小の場合と同様に考えると，
（１，１，１，１，１，１，１，１，２，２，２，２，２）のときの，$\boxed{7}\ \boxed{15}\boxed{24}\cdots\boxed{104}\boxed{113}\boxed{123}$が一番上の位が７の場合の最小ですから，ビー玉の数が６番目に少ない場合にあたります。