

最難関問題

2027とデジタル数字

短い棒を以下の本数使った数字で、数を表します。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6本	2本	5本	5本	4本	5本	6本	3本	7本	6本

たとえば2027は $5 + 6 + 5 + 3 = 19$ （本）の棒を使用します。2027のように、19本の棒を使い、3種類の数字で表される整数について、以下の問いに答えなさい。

(1) 小さいほうから1番目、5番目の整数を答えなさい。

(2) 2027は小さいほうから何番目の整数ですか。

(3) 最も大きい整数を答えなさい。

(4) このような整数に使われる数字から1つを選んでばらばらにして、使っていた棒で改めて数字を作り、数字をならびかえてできるだけ大きい整数を表します。たとえば27447の場合、2に使っていた5本の棒で数字の1と7を作り、7と4を含めた4つの数字を並びかえると777441を表すことができます。2027について同じ操作をすることで表すことができる整数を答えなさい。

(5) (4) で答えた整数は、大きいほうから何番目の整数ですか。

最難関問題

2027とデジタル数字

- (1) 1 番目…608, 5 番目…806 (2) 56 番目 (3) 74111111
(4) 722111 (5) 1044 番目

(1) 解説省略

(2) 3 種類の数字で表される整数なので, 3 桁の整数から考えます。3 桁で 3 種類の数字で表され, 19 本の棒がつかされるのは以下の場合です。

(0, 6, 8) …並べかえて, $2 \times 2 \times 1 = 4$ (通り)

(0, 8, 9) …4 通り

(6, 8, 9) … $3 \times 2 \times 1 = 6$ (通り)

以上で $4 + 4 + 6 = 14$ (個) です。

次に, 4 桁で千の位が 1 の場合, 百の位・十の位・一の位に使われる棒は, $19 - 2 = 17$ (本) です。千の位を含めて数字が 3 種類になるのは,

(0, 0, □), (6, 6, □), (9, 9, □) …□には 2, 3, 5 が入り, $3 \times 3 \times 3 = 27$ (通り)

(8, 8, 7) …3 通り

(8, □, □) …□には 2, 3, 5 が入り, $3 \times 3 = 9$ (通り)

以上で $27 + 3 + 9 = 39$ (個) です。

千の位が 2 で 2027 以下のものは小さい順に, 2001, 2010, 2027 の 3 個なので,
 $14 + 39 + 3 = 56$ (番目) です。

(3) 解説省略

(4) 0 をばらばらにしてから 3 個の 1 を作ることで, 722111 です。

最難関問題

(5) (3) で求めた 7 4 1 1 1 1 1 の 8 桁から順に考えます。

8 桁の整数

(1, 1, 1, 1, 1, 1, 7, 4) $\cdots 8 \times 7 = 56$ (通り) のみなので, 8 桁の整数は 56 個です。

7 桁の整数

(1, 1, 1, 1, 1, 7, $\square$)

$\cdots \square = 0$ のとき, $7 \times 6 - 6 = 36$ (通り), $\square = 6, 9$ のとき, $7 \times 6 \times 2 = 84$ (通り)

(1, 1, 1, 1, 1, 4, $\square$)

$\cdots \square = 2, 3, 5$ のとき, $7 \times 6 \times 3 = 126$ (通り)

(1, 1, 1, 1, 7, 7, $\square$)

$\cdots \square = 2, 3, 5$ のとき, $7 \times \frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times 3 = 315$ (通り)

(1, 1, 1, 1, 7, 4, 4)

$\cdots 7 \times \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 105$ (通り)

(1, 1, 1, 7, 7, 7, 4)

$\cdots 7 \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 140$ (通り)

7 桁の整数をあわせて, $36 + 84 + 126 + 315 + 105 + 140 = 806$ (個) です。

6 桁で 9 から始まる整数の下 5 桁

(1, 1, 7, 7, 7) $\cdots \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$ (通り)

(1, 1, 1, 1, $\square$) $\cdots \square = 2, 3, 5$ のとき, $5 \times 3 = 15$ (通り)

6 桁で 8 から始まる整数の下 5 桁

(1, 1, 1, 7, 7) $\cdots 10$ (通り)

(1, 1, 1, 1, 4) $\cdots 5$ (通り)

6 桁の整数で 9 または 8 から始まる整数は, $10 + 15 + 10 + 5 = 40$ (個) です。

6 桁で 79 から始まる整数の下 4 桁 (1, 1, 7, 7) $\cdots \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$ (通り)

6 桁で 78 から始まる整数の下 4 桁 (1, 1, 1, 7) $\cdots 4$ 通り

6 桁で 77 から始まる整数の下 4 桁

(1, 1, 1, 8) $\cdots 4$ 通り

(1, 1, 7, $\square$) $\cdots \square = 0, 6, 9$ のとき, $4 \times 3 \times 3 = 36$ (通り)

(1, 7, 7, $\square$) $\cdots \square = 2, 3, 5$ のとき, $4 \times 3 \times 3 = 36$ (通り)

(1, 7, 4, 4) $\cdots 4 \times 3 = 12$ (通り)

最難関問題

6桁で76から始まる整数の下4桁 (1, 1, 7, 7) … 6 (通り)

6桁で75から始まる整数の下4桁

(1, 1, 1, 5) … 4 通り

(1, 7, 7, 7) … 4 通り

6桁で74から始まる整数の下4桁

(1, 1, 4, 4) … 6 通り

(1, 7, 7, 4) … 12 通り

6桁で73から始まる整数の下4桁

(1, 1, 1, 3) … 4 通り

(1, 7, 7, 7) … 4 通り

ここまでで数えた7から始まる6桁の整数は,

$6 + 4 + 4 + 36 + 36 + 12 + 6 + 4 + 4 + 6 + 12 + 4 + 4 = 138$ (個) です。

6桁で72から始まる整数は大きい順に, 727771, 727717, 727177, 722111

となって722111は4番目なので, $56 + 806 + 40 + 138 + 4 = 1044$ (番目) です。