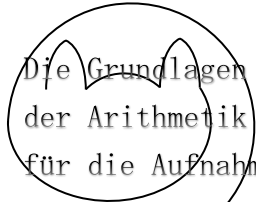


## 受験算数の基礎



## 最難関問題

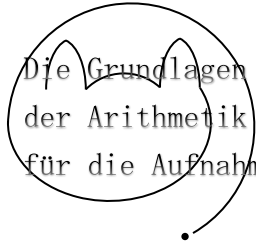
るいじょう じょうよ  
累乗と剰余

1, 4, 9, 16, 25, …のように, 同じ整数を2個かけてできる数を, 平方数といいます。

- (1) 平方数の一の位の数に決してならない数をすべて答えなさい。
- (2) 平方数を13で割ったときの余りに決してならない, 12以下の整数をすべて答えなさい。
- (3) 同じ整数Bを99個かけてできる整数A

$$\underbrace{B \times B \times \cdots \times B}_{99 \text{ 個}} = A$$

を, 13で割ったときの余りに決してならない, 12以下の整数をすべて答えなさい。



累乗と剰余

- (1) 2, 3, 7, 8    (2) 2, 5, 6, 7, 8, 11    (3) 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11

(1) 積の一の位は，かけあわせる数の一の位からわかるので，次のようになります。

$$\begin{array}{l} \square 1 \times \square 1 = \square 1, \quad \square 2 \times \square 2 = \square 4, \quad \square 3 \times \square 3 = \square 9, \\ \square 4 \times \square 4 = \square 6, \quad \square 5 \times \square 5 = \square 5, \quad \square 6 \times \square 6 = \square 6, \\ \square 7 \times \square 7 = \square 9, \quad \square 8 \times \square 8 = \square 4, \quad \square 9 \times \square 9 = \square 1, \\ \square 0 \times \square 0 = \square 0 \end{array}$$

以上に現れないのは，2, 3, 7, 8であり，これが答えとなります。

(2) (1) で問われている一の位の数とは，整数を10で割ったときの余りに相当します。(2) では13で割ったときの余りが問われているので，考え方は(1)と同じになります。整数を13で割ったときの余りが0の数から12の数までの13グループに分け，それぞれのグループの整数を2個かけてできる平方数がどのようになるのかを考えます。

$$\begin{array}{l} \text{余りが0の数} \cdots 0 \times 0 = 0, \quad 0 \div 13 = 0 \text{ 余り } \underline{0} \\ \text{余りが1の数} \cdots 1 \times 1 = 1, \quad 1 \div 13 = 0 \text{ 余り } \underline{1} \\ \text{余りが2の数} \cdots 2 \times 2 = 4, \quad 4 \div 13 = 0 \text{ 余り } \underline{4} \\ \text{余りが3の数} \cdots 3 \times 3 = 9, \quad 9 \div 13 = 0 \text{ 余り } \underline{9} \\ \text{余りが4の数} \cdots 4 \times 4 = 16, \quad 16 \div 13 = 1 \text{ 余り } \underline{3} \\ \text{余りが5の数} \cdots 5 \times 5 = 25, \quad 25 \div 13 = 1 \text{ 余り } \underline{12} \\ \text{余りが6の数} \cdots 6 \times 6 = 36, \quad 36 \div 13 = 2 \text{ 余り } \underline{10} \\ \text{余りが7の数} \cdots 7 \times 7 = 49, \quad 49 \div 13 = 3 \text{ 余り } \underline{10} \\ \text{余りが8の数} \cdots 8 \times 8 = 64, \quad 64 \div 13 = 4 \text{ 余り } \underline{12} \\ \text{余りが9の数} \cdots 9 \times 9 = 81, \quad 81 \div 13 = 6 \text{ 余り } \underline{3} \\ \text{余りが10の数} \cdots 10 \times 10 = 100, \quad 100 \div 13 = 7 \text{ 余り } \underline{9} \\ \text{余りが11の数} \cdots 11 \times 11 = 121, \quad 121 \div 13 = 9 \text{ 余り } \underline{4} \\ \text{余りが12の数} \cdots 12 \times 12 = 144, \quad 144 \div 13 = 11 \text{ 余り } \underline{1} \end{array}$$

以上に現れない，2, 5, 6, 7, 8, 11が答えとなります。

(3) (2)と同様に、13で割ったときの余りが0の数から12の数までの13グループに分けて考えます。例えば整数Bが、13で割った余りが5となる数の場合、次のようになります。

- ・ Bを13で割った余りは5,
  - ・  $B \times B$ を13で割った余りは、 $5 \times 5 = 25$ を13で割った余りとなるので12,
  - ・  $B \times B \times B$ を13で割った余りは、 $12 \times 5 = 60$ を13で割った余りで8,
  - ・  $B \times B \times B \times B$ を13で割った余りは、 $8 \times 5 = 40$ を13で割った余りで1,
  - ・  $B \times B \times B \times B \times B$ を13で割った余りは、 $1 \times 5 = 5$ を13で割った余りで5,
- こうして、余りは5, 12, 8, 1のくり返しになります。

○余りが0の数 0のくり返し

○余りが1の数 1のくり返し

○余りが2の数 2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10, 7, 1の12個の数のくり返し

○余りが3の数 3, 9, 1の3個の数のくり返し

○余りが4の数 4, 3, 12, 9, 10, 1の6個の数のくり返し

○余りが5の数 5, 12, 8, 1の4個の数のくり返し

○余りが6の数 6, 10, 8, 9, 2, 12, 7, 3, 5, 4, 11, 1の12個の数のくり返し

○余りが7の数 7, 10, 5, 9, 11, 12, 6, 3, 8, 4, 2, 1の12個の数のくり返し

○余りが8の数 8, 12, 5, 1の4個の数のくり返し

○余りが9の数 9, 3, 1の3個の数のくり返し

○余りが10の数 10, 9, 12, 3, 4, 1の6個の数のくり返し

○余りが11の数 11, 4, 5, 3, 7, 12, 2, 9, 8, 10, 6, 1の12個の数のくり返し

○余りが12の数 12, 1の2個の数のくり返し

以上のそれぞれのくり返しにおいて、99番目に現れる数は0, 1, 5, 8, 12のいずれかですから、2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11が答えとなります。