受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

累乗（るいじょう）と剰余（じょうよ）

１，４，９，１６，２５，…のように，同じ整数を２個かけてできる数を，平方数といいます。

（１）平方数の一の位の数に決してならない数をすべて答えなさい。

（２）平方数を１３で割ったときの余りに決してならない，１２以下の整数をすべて答えなさい。

（３）同じ整数Ｂを９９個かけてできる整数Ａ

$$\underbrace{B \times B \times \cdots \times B}_{\text{９９個}} = A$$

を，１３で割ったときの余りに決してならない，１２以下の整数をすべて答えなさい。

累乗と剰余

（１）２，３，７，８　（２）２，５，６，７，８，１１　（３）２，３，４，６，７，９，１０，１１

（１）積の一の位は，かけあわせる数の一の位からわかるので，次のようになります。

□１×□１＝□１，□２×□２＝□４，□３×□３＝□９，
□４×□４＝□６，□５×□５＝□５，□６×□６＝□６，
□７×□７＝□９，□８×□８＝□４，□９×□９＝□１，
□０×□０＝□０

以上に現れないのは，２，３，７，８であり，これが答えとなります。

（２）（１）で問われている一の位の数とは，整数を１０で割ったときの余りに相当します。（２）では１３で割ったときの余りが問われているので，考え方は（１）と同じになります。整数を１３で割ったときの余りが０の数から１２の数までの１３グループに分け，それぞれのグループの整数を２個かけてできる平方数がどのようになるのかを考えます。

余りが０の数…０×０＝０，０÷１３＝０余り０
余りが１の数…１×１＝１，１÷１３＝０余り１
余りが２の数…２×２＝４，４÷１３＝０余り４
余りが３の数…３×３＝９，９÷１３＝０余り９
余りが４の数…４×４＝１６，１６÷１３＝１余り３
余りが５の数…５×５＝２５，２５÷１３＝１余り１２
余りが６の数…６×６＝３６，３６÷１３＝２余り１０
余りが７の数…７×７＝４９，４９÷１３＝３余り１０
余りが８の数…８×８＝６４，６４÷１３＝４余り１２
余りが９の数…９×９＝８１，８１÷１３＝６余り３
余りが１０の数…１０×１０＝１００，１００÷１３＝７余り９
余りが１１の数…１１×１１＝１２１，１２１÷１３＝９余り４
余りが１２の数…１２×１２＝１４４，１４４÷１３＝１１余り１

以上に現れない，２，５，６，７，８，１１が答えとなります。

（３）（２）と同様に，１３で割ったときの余りが０の数から１２の数までの１３グループに分けて考えます。例えば整数Ｂが，１３で割った余りが５となる数の場合，次のようになります。

・Ｂを１３で割った余りは５，

・Ｂ×Ｂを１３で割った余りは，５×５＝２５を１３で割った余りとなるので１２，

・Ｂ×Ｂ×Ｂを１３で割った余りは，１２×５＝６０を１３で割った余りで８，

・Ｂ×Ｂ×Ｂ×Ｂを１３で割った余りは，８×５＝４０を１３で割った余りで１，

・Ｂ×Ｂ×Ｂ×Ｂ×Ｂを１３で割った余りは，１×５＝５を１３で割った余りで５，

こうして，余りは５，１２，８，１のくり返しになります。

〇余りが０の数　０のくり返し

〇余りが１の数　１のくり返し

〇余りが２の数　２，４，８，３，６，１２，１１，９，５，１０，７，１の１２個の数のくり返し

〇余りが３の数　３，９，１の３個の数のくり返し

〇余りが４の数　４，３，１２，９，１０，１の６個の数のくり返し

〇余りが５の数　５，１２，８，１の４個の数のくり返し

〇余りが６の数　６，１０，８，９，２，１２，７，３，５，４，１１，１の１２個の数のくり返し

〇余りが７の数　７，１０，５，９，１１，１２，６，３，８，４，２，１の１２個の数のくり返し

〇余りが８の数　８，１２，５，１の４個の数のくり返し

〇余りが９の数　９，３，１の３個の数のくり返し

〇余りが１０の数　１０，９，１２，３，４，１の６個の数のくり返し

〇余りが１１の数　１１，４，５，３，７，１２，２，９，８，１０，６，１の１２個の数のくり返し

〇余りが１２の数　１２，１の２個の数のくり返し

　以上のそれぞれのくり返しにおいて，９９番目に現れる数は０，１，５，８，１２のいずれかですから，２，３，４，６，７，９，１０，１１が答えとなります。