

最難関問題

山脈の切断・1

底面が1辺16cmの正方形で、高さが14cmの四角すいを、図1は2個、図2は5個、底面の辺が一部びったり重なりあうように組み合わせた立体を表しています。図1では底面の辺が6cm、図2では5cm重なっています。なお、図3のように直角をはさむ2辺の長さの比が3:4である直角三角形では、3辺の長さの比が、
3:4:5となります。

図1

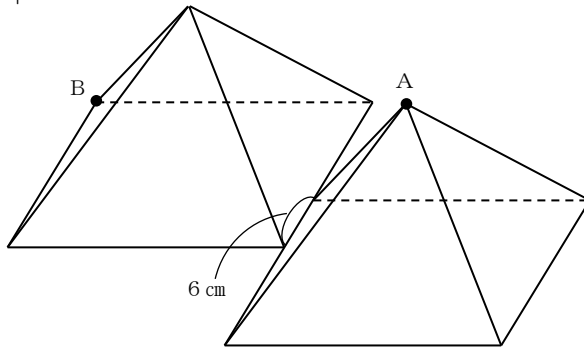


図3

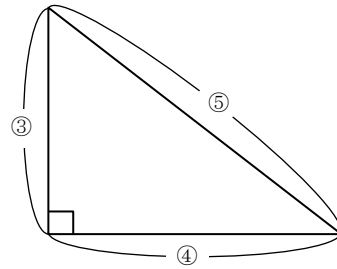
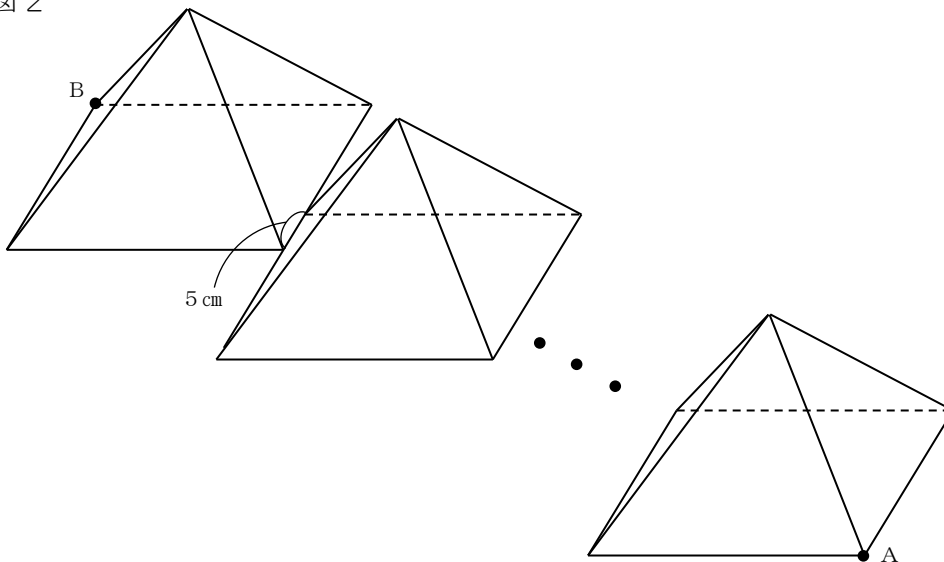


図2



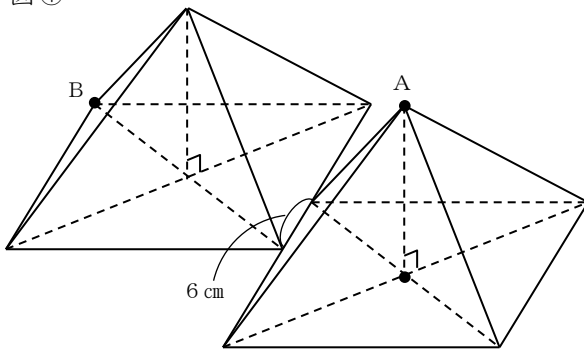
- (1) 図1において頂点A, Bを通るように、底面に垂直な平面で立体を切断しました。切断面の面積は何 cm^2 ですか。
- (2) 図2において頂点A, Bを通るように、底面に垂直な平面で立体を切断しました。切断面の面積は何 cm^2 ですか。

最難関問題

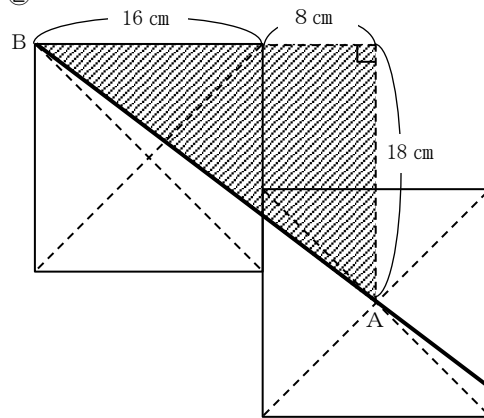
山脈の切断・1 (1) 260 cm^2 (2) 650 cm^2

(1) 底面と垂直な平面で切断するので、図①の●3点を通る切断となります。よって、真上から見ると、切断面は図②の太線になります。斜線で示した直角三角形は、直角をはさむ2辺の長さの比が $(16 + 8) : 18 = 4 : 3$ になります。

図①

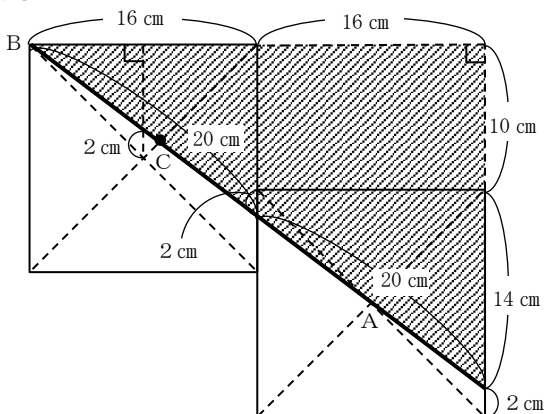


図②

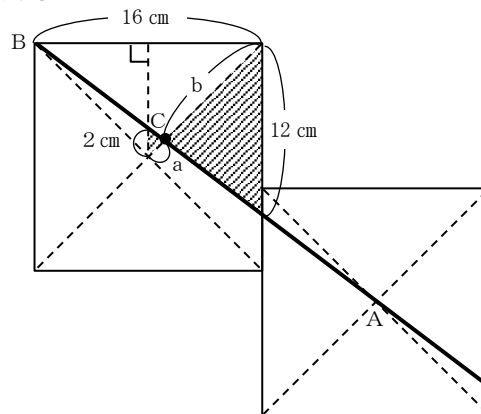


このことを利用して図②の各部分の長さを求めると、図③のようになります。ここで、切断面と四角すいの辺が交わる点Cに注目すると、図④の斜線で示した三角形の相似より、 $a : b = 2 : 12 = 1 : 6$ となります。

図③



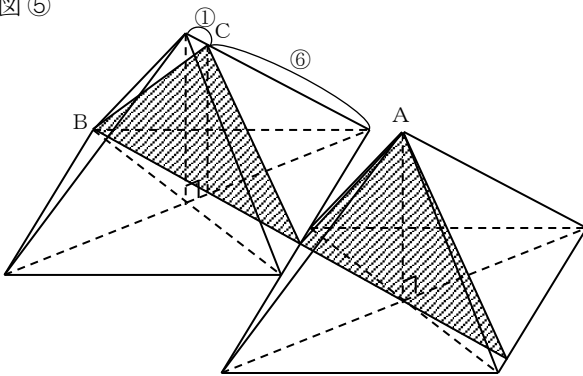
図④



最難関問題

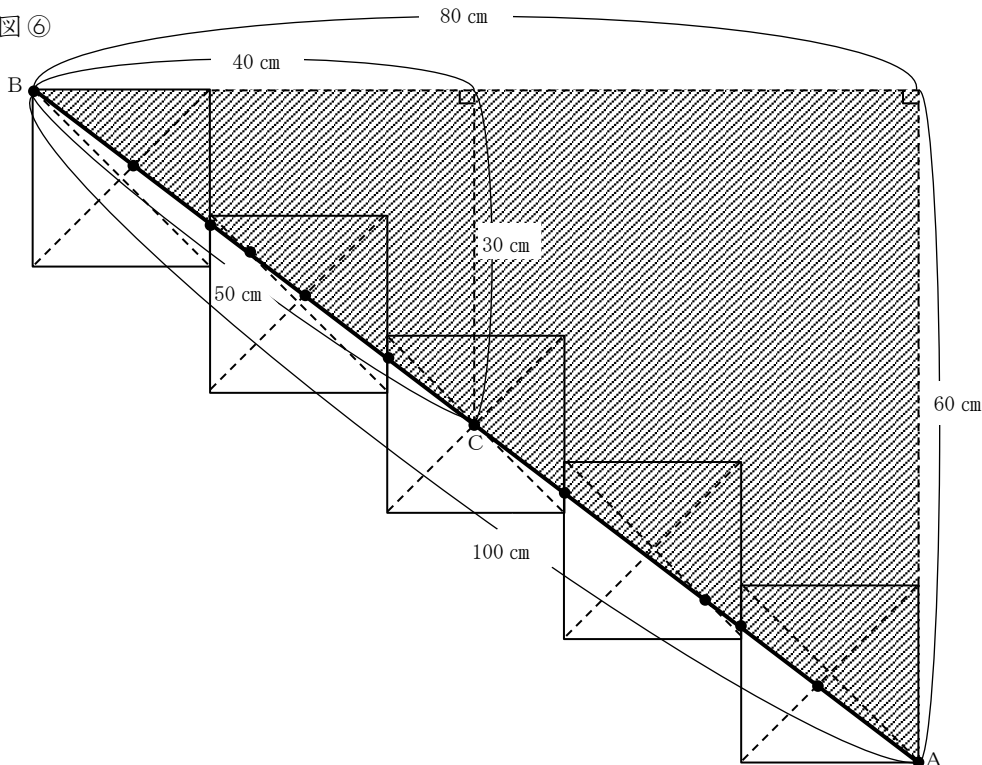
よって、切断面は図⑤のようになります。図⑤において点Cの高さは、 $14 \times \frac{6}{7} = 12$ (cm) です。
以上より、切断面の面積は $20 \times 12 \div 2 + 20 \times 14 \div 2 = 120 + 140 = 260$ (cm²) です。

図⑤



(2) 底面と垂直な平面で切断するので、真上から見ると、切断面は図⑥の太線のようになり、斜線で示した直角三角形は、直角をはさむ2辺の長さの比が $(16 \times 5) : (16 \times 5 - 5 \times 4) = 80 : 60 = 4 : 3$ になります。また、●が切断面の頂点となり、中央の四角すいでは、ちょうど四角すいの頂点Cと一致します。

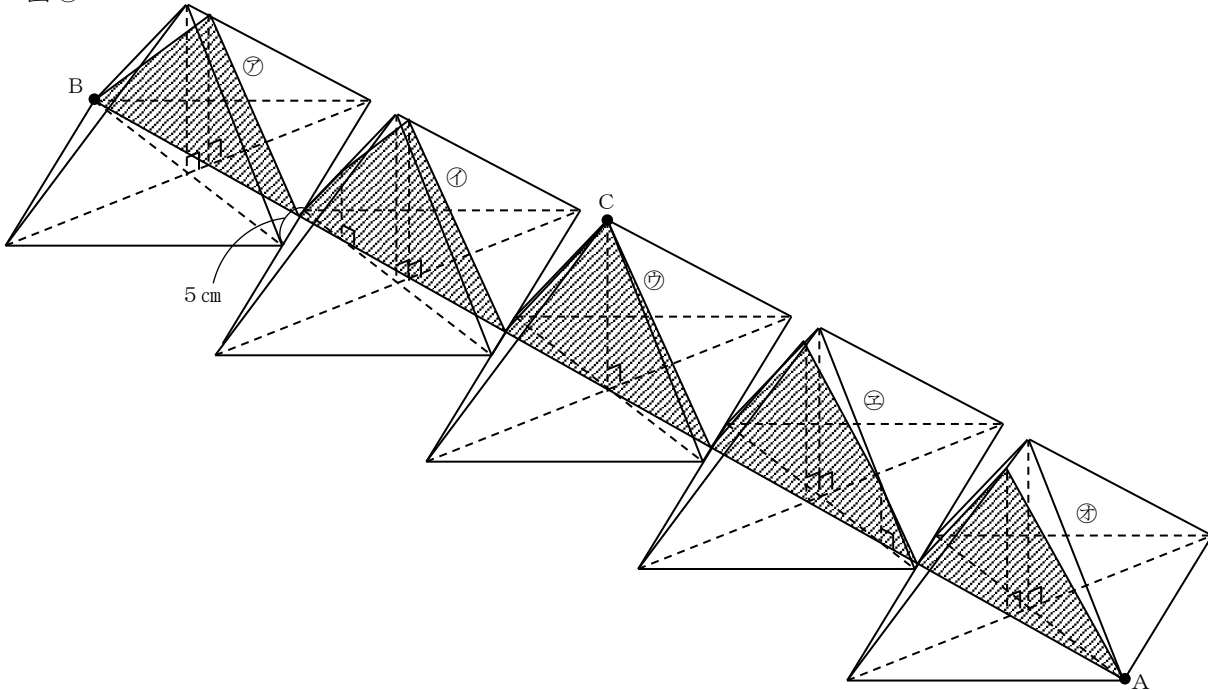
図⑥



最難関問題

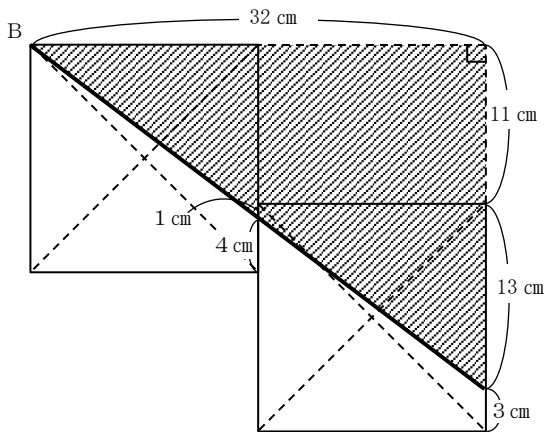
よって、見取り図で表すと、図⑦のようになります。

図⑦



図⑦において、三角形⑦と⑧は(1)の切断面の左の三角形と合同になるので、どちらも面積は 120 cm^2 です。また、中央の三角形⑨は(1)の切断面の右の三角形と合同になるので、面積は 140 cm^2 です。四角形⑩と⑪は合同なので、四角形⑩について考えます。まず、3:4:5の直角三角形に注目を見ると、図⑧のようになります。

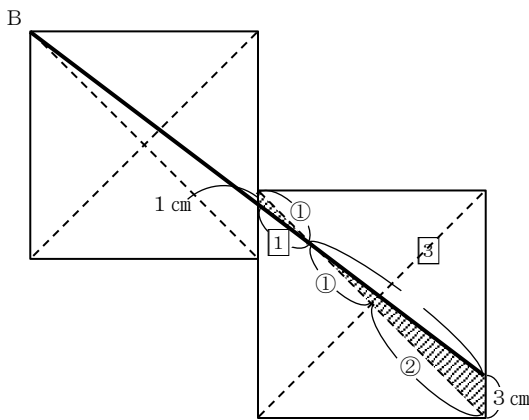
図⑧



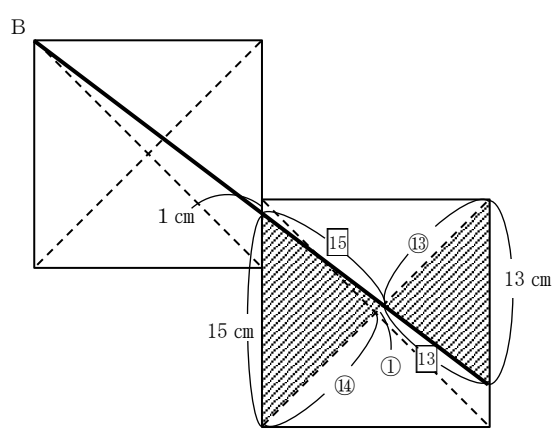
最難関問題

図⑨において斜線で示した三角形は1 : 3の相似になり、図⑩において斜線で示した三角形は15 : 13の相似になるので、長さの比はそれぞれ図に示したようになります。図⑨では①の長さは、 $20 \times \frac{1}{1+3} = 5$ (cm)、図⑩では⑬の長さは、 $20 \times \frac{13}{15+13} = 9\frac{2}{7}$ (cm) です。

図⑨



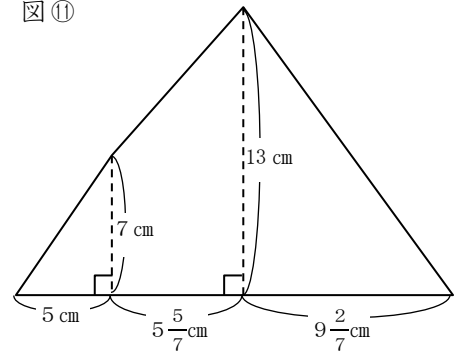
図⑩



以上より、四角形①は図⑪のようになります。2つある「高さ」は図⑨、⑩の丸いくつで表した正方形の対角線上の長さの比に注目して、 $14 \times \frac{1}{1+1} = 7$ (cm) と、 $14 \times \frac{13}{1+13} = 13$ (cm) になります。面積は、

$$5 \times 7 \times \frac{1}{2} + (7 + 13) \times 5 \times \frac{1}{2} + 9\frac{2}{7} \times 13 \times \frac{1}{2} = 135 \text{ (cm}^2\text{)} \text{ です。}$$

図⑪



よって、切断面の面積は、 $120 \times 2 + 135 \times 2 + 140 = 650$ (cm²) です。