受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

剰余と積分解

次の問いに答えなさい。

（１）７２で割って４６余る数と，$\boxed{\text{あ}}$で割って６余り，$\boxed{\text{い}}$で割って$\boxed{\text{う}}$余る数は，すべて一致します。
（$\boxed{\text{あ}}$，$\boxed{\text{い}}$，$\boxed{\text{う}}$）に入る整数の組みあわせをすべて答えなさい。

１，３，６，１０，１５，２１，２８，…という，１から順に２，３，４，…と整数を加えることでできる数を三角数といいます。１は１番目の三角数，３は２番目の三角数，６は３番目の三角数です。

（２）８で割ると７余る最初の三角数は１５です。では，８で割ると７余る３つ目の三角数は，何番目の三角数ですか。

（３）２０２４で割ると９１７余る最初の三角数は，何番目の三角数ですか。

最難関問題

剰余と積分解

（１）（８，９，１），（８，１８，１０），（８，３６，１０），（８，７２，４６）

（２）２１番目　（３）１８９７番目

（１）$\boxed{\text{あ}}$で割って６余る数は７２で割って４６余る数なので，$\boxed{\text{あ}}$は７２で割って４０余る数を割り切ることができる数です。よって，$\boxed{\text{あ}}$は７２と４０の公約数，つまりは８の約数です。８の約数のうちで６より大きいのは８だけなので，$\boxed{\text{あ}}$は８にきまります。

　次に，$\boxed{\text{あ}}$と$\boxed{\text{い}}$の最小公倍数は７２で，７２＝２×２×２×３×３，８＝２×２×２なので，$\boxed{\text{い}}$は７２の約数のうちで３×３＝９の倍数であるもの，つまりは９，１８，３６，７２です。

　$\boxed{\text{い}}$が9のとき，$\boxed{\text{う}}$は４６÷９＝５余り１より１なので，

（$\boxed{\text{あ}}$，$\boxed{\text{い}}$，$\boxed{\text{う}}$）＝（８，９，１）

　$\boxed{\text{い}}$が１８のとき，$\boxed{\text{う}}$は４６÷１８＝２余り１０より１０なので，

（$\boxed{\text{あ}}$，$\boxed{\text{い}}$，$\boxed{\text{う}}$）＝（８，１８，１０）

　$\boxed{\text{い}}$が３６のとき，$\boxed{\text{う}}$は４６÷３６＝１余り１０より１０なので，

（$\boxed{\text{あ}}$，$\boxed{\text{い}}$，$\boxed{\text{う}}$）＝（８，３６，１０）

　$\boxed{\text{い}}$が７２のとき，$\boxed{\text{う}}$は４６÷７２＝０余り４６より４６なので，

（$\boxed{\text{あ}}$，$\boxed{\text{い}}$，$\boxed{\text{う}}$）＝（８，７２，４６）

（２）三角数は１＋２＋３＋４＋５＋６＋７＋８＋９＋１０＋１１＋…と整数を順に足していくことでできる数ですが，８で割った余りという点からは１＋２＋３＋４＋５＋６＋７＋０＋１＋２＋３＋…を足していくことになります。

　余りは順に，１，１＋２＝３，３＋３＝６，６＋４＝１０より１０÷８＝１余り２，２＋５＝７，７＋６＝１３より１３÷８＝１余り５，５＋７＝１２より１２÷８＝１余り４，…というように求めていくことができて，１，３，６，２，７，５，４，４，５，７，２，６，３，１，０，０，１，…という，１，３，６，２，７，５，４，４，５，７，２，６，３，１，０，０のくり返しとなります。

８で割った余りが７となる数は１６個の周期の内の５番目と１０番目なので，３つ目は

１６＋５＝２１（番目）の三角数です。

最難関問題

（３）（２）と同様にして２０２４で割ったときの周期で調べていくと，大変なことになりそうです。そこで，（１）の発想を利用します。２０２４＝２×２×２×１１×２３であることから，２０２４は２×２×２＝８と１１と２３の最小公倍数です。よって，２０２４で割って９１７余る数は，

９１７÷８＝１１４余り５より８で割って５余り，

９１７÷１１＝８３余り４より１１で割って４余り，

９１７÷２３＝３９余り２０より２３で割って２０余る整数です。

　もちろん，最小公倍数が２０２４となる組み合わせは他にもあって，例えば８と４４と４６，８８と２３等になりますが，いずれの場合も調べ上げる周期が長くなるだけです。

　（２）より三角数を８で割った余りの周期は

１，３，６，２，７，５，４，４，５，７，２，６，３，１，０，０，

（２）と同様にして三角数を１１で割った余りの周期を調べると，

１，３，６，１０，４，１０，６，３，１，０，０，

２３で割った余りの周期は，

１，３，６，１０，１５，２１，５，１３，２２，９，２０，９，２２，１３，５，２１，１５，１０，６，３，１，０，０です。

８で割って５余る三角数は（１６の倍数＋６，９）番目に現れ，

１１で割って４余る三角数は（１１の倍数＋５）番目に現れ，

２３で割って２０余る三角数は（２３の倍数＋１１）番目に現れます。

あとは，この条件を満たす最小の整数を求めるだけです。（２３の倍数＋１１）の整数を順に書いていくと，１１，３４，５７，８０，１０３，１２６，…となって，１２６は（１１の倍数＋５）の整数です。１２６に２３と１１の最小公倍数２５３を次々に加えていって，（１６の倍数＋４，１１）を探します。１２６÷１６＝７余り１４で，２５３÷１６＝１５余り１３なので，

１２６に２５３を加えていった整数を１６で割った余りは，

１４，１４＋１３－１６＝１１，１１＋１３－１６＝８，５，２，２＋１３＝１５，１２，９，…となって９が現れます。よって，１２６＋２５３×７＝１８９７（番目）です。